This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

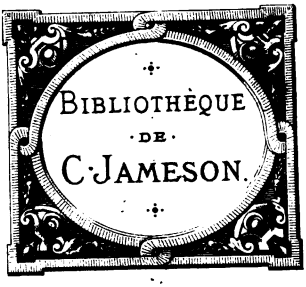
**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

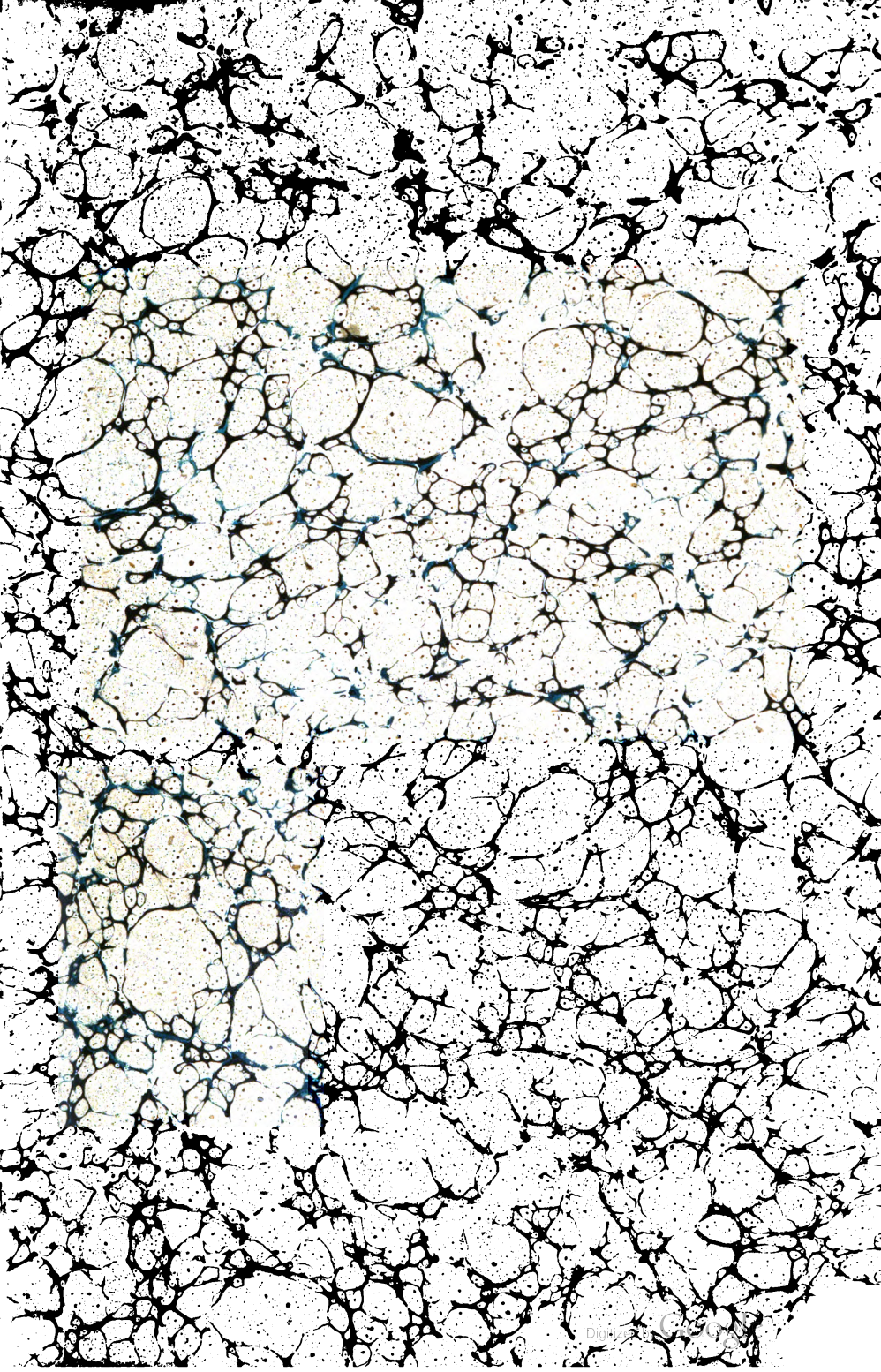
3 2044 103 176 152

HARVARD
LAW
LIBRARY

LIBRAIRIE
RAYMOND CLAVREUIL
57, QUAI SAINT-DENIS
PARIS VI



HARVARD LAW SCHOOL
LIBRARY



Digitized by Google

France

Digitized by Google

Digitized by Google

# THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

# ANNUITÉS VIAGÈRES

ET DES

# ASSURANCES SUR LA VIE

PAR

**M. MAAS,**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, LICENCIÉ ÈS SCIENCES

Directeur et l'un des Fondateurs

**De L'UNION, Compagnie d'assurances sur la vie,**

Autorisée en 1829.

**PARIS,**

IMPRIMERIE ADMINISTRATIVE DE PAUL DUPONT,

Rue de Grenelle-Saint-Honoré, 45.

1865

Digitized by Google

# A MON FILS.

Ce petit écrit est le résumé d'une longue expérience ; il renferme peu d'idées ou de formules nouvelles. La majeure partie a été empruntée à un ouvrage anglais où ce sujet a été traité complétement, mais qui comprend des détails sans intérêt pour nous et qui laisse à désirer sous le rapport de la méthode. Je me suis efforcé d'exposer succinctement, mais sans rien omettre d'essentiel, du moins en ce qui concerne les opérations sur une ou deux têtes, les règles d'après lesquelles les tarifs doivent être calculés. Mon principal but a été d'être utile à ceux qui font des assurances sur la vie leur occupation habituelle, et qui, appelés à appliquer les tables et à répondre aux questions qui se présentent, ont besoin de connaître les méthodes d'après lesquelles ces questions doivent être résolues.

C'est à ta demande que j'ai rédigé ce travail. C'est avec ton concours et en y ajoutant tes remarques que je le publie aujourd'hui ; il est donc aussi ton ouvrage.

Ton bien affectionné,

M. MAAS.

Digitized by Google

# THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

# DES ANNUITÉS VIAGÈRES

ET DES

# ASSURANCES SUR LA VIE.

---

## INTRODUCTION.

Les rentes ou annuités viagères sont trop connues pour avoir besoin d'être définies. Quoiqu'elles fussent depuis longtemps usitées en France, les règles d'après lesquelles on doit les calculer étaient généralement ignorées ou méconnues. Car, au lieu de donner à chaque âge un taux de rente basé sur les chances de la mortalité, on accordait un intérêt de 10 p. 100 même aux plus jeunes têtes, et on le dépassait rarement pour les têtes les plus âgées.

Les rentes viagères sont de diverses espèces :

Elles sont immédiates, différées ou temporaires, suivant qu'on en jouit de suite, ou seulement après quelques années d'attente, ou bien pendant un temps limité ; elles

683840

Digitized by Google

reposent sur une ou plusieurs têtes avec réversion de tout ou partie au profit du survivant ; il y a aussi des rentes de survie qui ne commencent qu'après le décès d'une ou de plusieurs personnes et dont profitent d'autres personnes désignées. Toutes ces variétés peuvent être soumises à un calcul exact dont les principes seront indiqués dans cet écrit.

Les assurances sur la vie ont été pendant longtemps inconnues en France, tandis qu'elles étaient fort répandues dans des pays voisins, et surtout en Angleterre. Ces opérations sont, en quelque sorte, l'inverse des rentes viagères. Le rentier aliène un capital pour lequel il obtient une rente sa vie durant. L'assuré paye une prime tant qu'il existe, pour laisser à sa mort un capital à ses héritiers.

Les assurances sur la vie présentent aussi de nombreuses variétés. La prime est payable annuellement durant toute la vie de l'assuré, ou n'est exigible que pendant un certain nombre d'années. Le prix de l'assurance peut même être payé de suite intégralement. L'assurance, au lieu de s'étendre à toute la vie, n'est quelquefois que temporaire, c'est-à-dire qu'elle n'a d'effet que si l'assuré meurt dans un délai déterminé, et devient nulle quand ce délai est expiré. Le contrat d'assurance peut aussi reposer sur une ou plusieurs têtes et être subordonné à de certaines conditions de survivance.

On comprend encore sous la dénomination d'assurances sur la vie des placements qui ont pour objet de procurer à l'assuré un capital s'il est vivant ou si une tête désignée existe à une époque déterminée, ou bien

Digitized by Google

encore de lui faire obtenir un capital qu'il touche lui-même à une date convenue, ou que ses héritiers reçoivent aussitôt sa mort, s'il meurt avant l'époque fixée.

Toutes ces opérations, malgré leur diversité, se rattachent à une même théorie ; elles sont toutes des combinaisons des chances de la mortalité avec le placement des fonds à intérêts composés. Il n'est donc pas hors de propos de présenter d'abord quelques considérations sur chacun de ces éléments.

Digitized by Google

## DES PLACEMENTS A INTÉRÊTS COMPOSÉS.

On appelle, comme on sait, placement à intérêts composés une opération dans laquelle l'intérêt est ajouté au capital à la fin de chaque période de temps et devient à son tour productif d'intérêts au même taux. Il existe des traités spéciaux sur la matière; on n'en dira donc ici que ce qui peut se rapporter à la théorie des assurances sur la vie.

1. Soit $i$ l'intérêt de 1 franc pendant une année; à la fin de la première année, le capital augmenté de l'intérêt sera $1+i$. Si l'on désigne par $a$ ce nouveau capital, il deviendra à la fin de la deuxième année $a\ (1+i)$, et, en remplaçant $a$ par sa valeur, on aura $(1+i)^2$ pour le résultat du placement au bout de deux ans; de la même manière, on trouvera qu'à l'expiration de la troisième année, le montant du placement sera égal à $(1+i)^3$, et en général, en désignant par $m$ le produit de l'opération après $n$ années, on aura :

$$m = (1+i)^n,$$

ou en se servant des logarithmes :

$$\log m = n \log (1+i).$$

Il est facile, à l'aide de cette équation, quand on connaît deux des trois quantités, $m$, $n$, $i$, de déterminer la troisième.

Si l'on veut calculer le produit à intérêts composés d'une somme quelconque $s$, ce produit augmentant

Digitized by Google

proportionnellement à la somme placée, on aura, si on le désigne par $p$ :

$$p = s(1+i)^n.$$

2. Le montant de la capitalisation par semestres, trimestres ou autres fractions d'année se déduit aisément de ce qui précède. En effet, soit $\frac{i}{2}$ l'intérêt semestriel $\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}$ sera le résultat de la capitalisation après $2n$ semestres. L'intérêt trimestriel étant $\frac{i}{4}$, le produit sera $\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n}$ à l'expiration de $4n$ trimestres ou $n$ années, et ainsi de suite.

L'intérêt annuel est dans ce cas un peu supérieur à $i$, puisque le produit en fin d'année est $\left(1+\frac{i}{2}\right)^2$, $\left(1+\frac{i}{4}\right)^4$, etc., ce qui donne pour l'intérêt annuel $\left(1+\frac{i}{2}\right)^2 - 1$; $\left(1+\frac{i}{4}\right)^4 - 1$, etc.

3. Le problème inverse consiste à déterminer la valeur actuelle $v$ d'une somme de 1 franc à recevoir dans $n$ années, de telle sorte que cette valeur placée à intérêts composés reproduise exactement le principal. Il suffit pour résoudre cette question de cette simple proportion :

$$(1+i)^n : 1 :: 1 : v,$$

d'où :

$$v = \frac{1}{(1+i)^n}, \text{ ou plus simplement } v = (1+i)^{-n}$$

4. Cherchons maintenant le produit au bout de $n$ années d'une somme de 1 franc, qui serait placée annuellement à intérêts composés.

Il faut distinguer le cas, où l'annuité se paye chaque fois au commencement de l'année, de celui où l'annuité

Digitized by Google

est versée seulement en fin d'année. Dans ce dernier cas, le premier versement est productif d'intérêts pendant $n-1$ années, et vaut par conséquent, au terme de l'opération $(1+i)^{n-1}$; le deuxième versement vaut $(1+i)^{n-2}$, et ainsi de suite jusqu'au dernier, qui, n'étant payé qu'à l'expiration de $n$ années, vaut simplement 1 franc.

On a donc la série :

$$1+(1+i)+(1+i)^2+\text{etc.}\ldots\ldots+(1+i)^{n-1}.$$

Or, on sait que la progression :

$$1+q+q^2+\text{etc.}\ldots\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Donc, si l'on appelle $M$ le résultat cherché, on aura :

$$M=\frac{(1+i)^n-1}{i}.$$

Lorsque l'annuité se paye d'avance, il faut multiplier chacun des termes de la série par $(1+i)$. Par conséquent la somme totale doit être multipliée par la même quantité, et l'on aura :

$$M(1+i) \text{ ou } M'=\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i).$$

On pourrait trouver numériquement la valeur d'une annuité par la formule n° 1, mais il faudrait calculer tous les termes depuis $(1+i)$ jusqu'à $(1+i)^{n-1}$ et en faire la somme, tandis que la formule ci-dessus donne la solution directe et simplifie l'opération.

5. Le problème inverse du précédent consiste à déterminer la valeur actuelle $V$ d'une annuité qui doit être servie pendant $n$ années et à la fin de chaque année. Il suffit pour le résoudre de ramener à sa valeur actuelle

Digitized by Google

chacun des termes de la série n° 4, et il faut pour cela la multiplier par $(1+i)^{-n}$, ce qui donne :

$$V = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \text{etc.} + (1+i)^{-n}.$$

d'où :

$$V = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

On obtiendrait le même résultat en multipliant par $(1+i)^{-n}$ la somme $M$.

A mesure que $n$ augmente $(1+i)^{-n}$ diminue, et quand $n$ est infiniment grand, c'est-à-dire quand l'annuité est perpétuelle, l'expression se réduit à $\frac{1}{i}$

La formule ci-dessus peut se mettre en ces termes :

$$V = \frac{1}{i} - \frac{1}{i}(1+i)^{-n}.$$

On voit ainsi qu'une annuité payable pendant $n$ années est égale au capital d'une rente perpétuelle, moins la valeur actuelle de cette même rente dont on ne jouirait qu'après $n$ années.

Si l'annuité est payable au commencement de chaque année, et en la désignant par $V'$, on aura, pour sa valeur :

$$V' = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots., \text{etc.}, + (1+i)^{-n+1}$$
$$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i};$$

Donc :

$$V' = V(1+i).$$

6. La formule précédente est d'un usage assez fréquent pour le calcul des amortissements, c'est-à-dire pour déterminer l'annuité nécessaire à l'amortissement en capital et intérêts d'une somme empruntée. Soit $S$ cette somme, et $A$ l'annuité, on aura

$$S = A\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Digitized by Google

équation d'après laquelle il est facile de déterminer $S$ quand on connaît $A$, et réciproquement (1).

La quantité $A$ se compose de deux parties, l'une qui représente l'intérêt du capital emprunté, l'autre qui sert à reconstituer ce même capital à l'aide des intérêts cumulés : la première partie est égale à $Si$ ; la seconde à $A - Si$ ; en remplaçant $Si$ par son équivalent et en appelant $a$ la quantité nécessaire pour reformer le capital, on aura :

$$a = A - A\left(1 - (1+i)^{-n}\right) = A\,(1+i)^{-n}.$$

7. Si l'annuité est payable par semestre et exprimée

---

(1) A cette théorie se rattache une question qui n'a pas un rapport direct avec l'objet spécial de cet écrit, mais dont l'intérêt pratique est tel qu'il a paru utile d'en donner ici la solution.

Supposons qu'on emprunte un capital $C$, mais qu'on se reconnaisse débiteur d'un capital supérieur $C'$ remboursable en $n$ années moyennant une annuité $A$ calculée à l'intérêt $i'$, et demandons-nous à quel intérêt ressortira cet emprunt par rapport à $C$. Si nous appelons cet intérêt $i$, nous aurons l'équation :

$$C = \frac{A\left(1 - (1+i)^{-n}\right)}{i}.$$

D'autre part, nous avons :

$$C' = \frac{A\left(1 - (1+i')^{-n}\right)}{i'}.$$

En divisant ces deux équations l'une par l'autre et en désignant pour plus de simplicité $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ par $I$, et $\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}$ par $I'$, nous trouverons :

$$\frac{C}{C'} = \frac{I}{I'} \text{ d'où } I = \frac{C}{C'} \times I',$$

équation qui donne la valeur actuelle de l'annuité d'un franc due par l'emprunteur, et dont on déduira facilement l'intérêt par la seule inspection des tables d'intérêts composés.

Ainsi, prenons pour exemple une entreprise qui aurait émis, au prix de 300 francs, des obligations de 500 francs en capital productives d'in-

Digitized by Google

par $\frac{1}{2}$, l'intérêt étant de $\frac{i}{2}$ par semestre, on aura pour le produit, conformément au n° 4 :

$$\frac{1}{2}\left\{1+\left(1+\frac{i}{2}\right)+\left(1+\frac{i}{2}\right)^2+\ldots\ldots\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}-1}{\left(1+\frac{i}{2}\right)-1}=\frac{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}-1}{i},$$

Si l'annuité est payable par trimestre, on aura en opérant de même :

$$\frac{\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n}-1}{i}.$$

La valeur actuelle de l'annuité sera, conformément au n° 5 :

Dans le cas d'un payement semestriel $\dfrac{1-\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-2n}}{i}$ ;

Dans le cas d'un payement trimestriel $\dfrac{1-\left(1+\frac{i}{4}\right)^{-4n}}{i}$.

---

térêt à 3 p. 100 et remboursables en 90 ans; on trouve dans des tables d'intérêts composés ou en faisant le calcul $I'=31{,}0024$; par conséquent :

$$I=\frac{300}{500}\times 31{,}0024=18{,}601,$$

valeur qui correspond à un intérêt de 5.32 p. 100.

Si l'on veut savoir à quel prix correspond un intérêt de 5 p. 100, on aura, après avoir trouvé dans les tables $I=19{,}7523$ :

$$C=\frac{I}{I'}\times C'=500\times\frac{19{,}7523}{31{,}0024}=318^{f}\,56^{c}.$$

L'équation $C'=A\times I'$ peut donner encore la valeur de l'annuité dont se grève l'emprunteur pour amortir le capital et les intérêts, car on en tire :

$$A=\frac{C'}{I'}\text{ ou }A=\frac{500}{31{,}0024}=16^{f}\,129.$$

La valeur à 5 p. 100 d'une annuité de 1 franc payable pendant 90 ans étant, comme il vient d'être dit, de 19,7523, l'annuité de 16 fr. 129 vaudra 16 fr. $129\times 19{,}7523=318$ fr. 56 c., comme ci-dessus.

Digitized by Google

8. Dans le numéro précédent, l'accroissement annuel de l'intérêt est supérieur à $i$. Si l'on veut résoudre les mêmes questions sous la condition que l'intérêt annuel sera précisément égal à $i$, on aura pour le produit au bout de six mois $(1+i)^{\frac{1}{2}}$, et par conséquent la série donnant le montant de l'annuité fractionnaire par semestre au bout de $n$ années serait :

$$\frac{1}{2}\left\{1+(1+i)^{\frac{1}{2}}+(1+i)+(1+i)^{\frac{3}{2}}+\ldots.+(1+i)^{2n-\frac{1}{2}}\right\},$$

dont la somme est égale à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{(1+i)^{2n}-1}{(1+i)^{\frac{1}{2}}-1}\right).$$

Si l'annuité est payable par trimestre, on trouvera pour le produit de la même manière :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{(1+i)^{4n}-1}{(1+i)^{\frac{1}{4}}-1}\right).$$

La valeur actuelle de l'annuité serait, dans le cas d'un payement semestriel :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-(1+i)^{-2n}}{(1+i)^{\frac{1}{2}}-1}\right),$$

et, dans le cas du payement trimestriel :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1-(1+i)^{-4n}}{(1+i)^{\frac{1}{4}}-1}\right).$$

9. Au moyen des formules qui précèdent, et notamment de celles indiquées sous les n$^{os}$ 1, 3, 4 et 5, on a calculé des tables à des taux d'intérêt très-rapprochés qui donnent immédiatement dans la plupart des cas la solution numérique des problèmes qui se rattachent aux intérêts composés et aux amortissements.

---

Digitized by Google

## PROBABILITÉS DE VIE.

10. On appelle table de mortalité une table qui indique combien, sur un nombre d'individus de l'âge $a$ il en vit à l'âge $a+1$, $a$ étant pris depuis la naissance jusqu'à l'âge le plus avancé de la vie humaine.

Désignons par $y_a$ le nombre des vivants à l'âge $a$, la probabilité qu'une personne de l'âge $a$ vive à l'âge $a+1$ sera égale à $\frac{y_{a+1}}{y_a}$ ; la probabilité qu'un événement arrive, étant, comme on sait, le rapport du nombre des chances favorables à cet événement au nombre total des chances favorables ou contraires.

Le nombre des décès qui peuvent survenir de l'âge $a$ à l'âge $a+1$ est exprimé par $y_a - y_{a+1}$ et la probabilité de mourir d'un de ces âges à l'autre sera égale à

$$\frac{y_a - y_{a+1}}{y_a}.$$

Si l'on réunit ces deux probabilités, on aura :

$$\frac{y_{a+1}}{y_a} + \frac{y_a - y_{a+1}}{y_a} = 1.$$

Cette quantité est l'expression de la certitude dans le calcul des probabilités.

De même, la probabilité pour une personne de l'âge $a$ d'être vivante à l'âge $a+n$ est égale à $\frac{y_{a+n}}{y_a}$, et la probabilité qu'elle n'atteindra pas cet âge est $\frac{y_a - y_{a+n}}{y_a}$.

Digitized by Google

**11.** La probabilité pour une personne de l'âge $a$ d'être vivante à une époque quelconque intermédiaire entre $a$ et $a+1$ diffère de la probabilité qu'elle a d'exister à l'âge $a+1$. La première est égale au rapport entre le nombre des vivants à l'âge $a$ soit $y_a$ et le nombre moyen des vivants de l'âge $a$ à l'âge $a+1$, soit $\frac{y_a + y_{a+1}}{2}$: ce rapport est donc égal à $\frac{y_a + y_{a+1}}{2y_a}$. De même, la probabilité qu'elle a de vivre une deuxième année est égale à $\frac{y_{a+1} + y_{a+2}}{2y_a}$; pendant une 3$^e$ année $\frac{y_{a+2} + y_{a+3}}{2y_a}$, etc.

Si l'on additionne toutes ces probabilités, on aura :

$$\frac{y_a + 2y_{a+1} + 2y_{a+2} + 2y_{a+3} + \ldots + 2y_\omega}{2y_a} = \frac{1}{2} + \frac{y_{a+1} + y_{a+2} + \ldots + y_\omega}{y_a},$$

$\omega$ désignant l'âge extrême de la table.

C'est ce qu'on appelle la vie moyenne, laquelle est égale à la somme des probabilités qu'une personne de l'âge $a$ a d'atteindre chacun des âges supérieurs, en ajoutant à cette somme une demi-année.

**12.** Si l'on considère maintenant les combinaisons relatives à l'existence de deux têtes, il faut se rappeler que la probabilité de la coexistence de deux événements indépendants l'un de l'autre est égale au produit des probabilités de chaque événement séparé. D'après cela :

1° La probabilité que 2 têtes des âges $a$ et $b$ existeront simultanément dans $n$ années est égale à $\frac{y_{a+n}}{y_a} \times \frac{y_{b+n}}{y_b}$ ou $\frac{y_{a+n}\, y_{b+n}}{y_a\, y_b}$.

Digitized by Google

2° La probabilité que la tête de l'âge $a$ sera vivante dans $n$ années et que la tête de l'âge $b$ aura cessé d'exister sera représentée par :

$$\frac{y_{a+n}}{y_a} \times \frac{y_b - y_{b+n}}{y_b} \text{ ou bien } \frac{y_{a+n}}{y_a}\left(1 - \frac{y_{b+n}}{y_b}\right).$$

3° La probabilité que la tête de l'âge $b$ sera vivante dans $n$ années et que la tête de l'âge $a$ sera décédée aura pour expression :

$$\frac{y_{b+n}}{y_b}\left(1 - \frac{y_{a+n}}{y_a}\right).$$

4° La probabilité que les 2 têtes auront cessé de vivre sera égale à :

$$\frac{y_a - y_{a+n}}{y_a} \times \frac{y_b - y_{b+n}}{y_b} \text{ ou } \left(1 - \frac{y_{a+n}}{y_a}\right)\left(1 - \frac{y_{b+n}}{y_b}\right).$$

En additionnant les trois premières expressions et en simplifiant, on aura la probabilité que sur les 2 têtes, il en existe au moins une, soit :

$$\frac{y_{a+n}}{y_a} + \frac{y_{b+n}}{y_b} - \frac{y_{a+n}\, y_{b+n}}{y_a\, y_b}.$$

En additionnant les quatre probabilités on devra trouver la certitude, et en effet :

$$\frac{y_{a+n}\, y_{b+n}}{y_a\, y_b} + \frac{y_{a+n}}{y_a}\left(1 - \frac{y_{b+n}}{y_b}\right) + \frac{y_{b+n}}{y_b}\left(1 - \frac{y_{a+n}}{y_a}\right) + \left(1 - \frac{y_{a+n}}{y_a}\right)\left(1 - \frac{y_{b+n}}{y_b}\right) = 1.$$

13. Recherchons maintenant quelle est la probabilité qu'une personne de l'âge $a$ meure avant une personne de l'âge $b$.

La probabilité qu'une personne de l'âge $a$ meure dans l'année est égale à $\frac{y_a - y_{a+1}}{y_a}$.

Digitized by Google

La probabilité qu'une personne de l'âge $b$ vive à une époque quelconque de l'âge $b$ à l'âge $b+1$ est égale à : $\frac{y_b + y_{b+1}}{2y_b}$ (n° 11).

En multipliant ces deux expressions, on a $\frac{(y_a - y_{a+1})(y_b + y_{b+1})}{2y_a y_b}$, probabilité demandée pour la première année ; on aura de même $\frac{(y_{a+1} - y_{a+2})(y_{b+1} + y_{b+2})}{2y_a y_b}$ pour cette probabilité pendant la deuxième année.

Dans la $n^e$ année, elle sera :

$$\frac{(y_{a+n-1} - y_{a+n})(y_{b+n-1} + y_{b+n})}{2y_a y_b}.$$

En réunissant toutes ces probabilités, on aura :

$$\frac{1}{2y_a y_b}\Big\{(y_a - y_{a+1})(y_b + y_{b+1}) + (y_{a+1} - y_{a+2})(y_{b+1} + y_{b+2}) + \cdots + (y_{a+n-1} - y_{a+n})(y_{b+n-1} + y_{b+n})\Big\},$$

quantité qui exprime la probabilité qu'une personne de l'âge $a$ meure avant une personne de l'âge $b$ dans le courant de $n$ années.

En prolongeant le calcul jusqu'aux limites de la vie de la personne la plus âgée, on aura la solution complète du problème de la probabilité de survie.

On aura de même pour l'expression de la probabilité que $b$ meure avant $a$ :

$$\frac{1}{2y_a y_b}\Big\{(y_b - y_{b+1})(y_a + y_{a+1}) + (y_{b+1} - y_{b+2})(y_{a+1} + y_{a+2}) \cdots + (y_{b+n-1} - y_{b+n})(y_{a+n-1} + y_{a+n})\Big\}.$$

En réunissant ces deux expressions, on trouvera :

$$\frac{1}{2y_a y_b}(2y_a y_b - 2y_{a+n} y_{b+n}) = 1 - \frac{y_{a+n} y_{b+n}}{y_a y_b}.$$

quantité égale à la certitude, moins la probabilité que les deux têtes seront toutes deux vivantes dans $n$ années.

Digitized by Google

Si le calcul est poussé jusqu'aux limites de l'existence, le dernier terme devient nul et il y a certitude.

Si les deux têtes sont du même âge, c'est-à-dire si $a = b$, la probabilité que l'une survive à l'autre sera égale à $\frac{1}{2y_a^2}\left(y_a^2 - y_{a+n}^2\right)$, et si le nombre $n$ d'années dépasse la limite des tables, l'expression se réduit à $\frac{1}{2}$.

Les probabilités dépendant de l'existence d'un plus grand nombre de têtes donnent lieu à d'autres combinaisons; on trouvera plus loin celles qui sont relatives à trois têtes.



Digitized by Google

## DES TABLES DE MORTALITÉ.

14. Il existe un grand nombre de tables de mortalité; elles varient selon les pays, et dans chaque pays suivant la classe ou la profession des individus que l'on observe.

Les tables de mortalité les plus connues en France sont la table de Deparcieux et celle de Duvillard.

La première, dressée il y a plus d'un siècle, d'après des observations faites sur des religieux et des tontiniers, exprime encore assez exactement la loi de mortalité des têtes choisies, du moins dans les âges moyens de la vie, c'est-à-dire depuis l'âge de 5 ans jusqu'à l'âge de 60.

La table de Duvillard, construite au commencement du siècle, d'après des observations faites en France dans diverses localités, et sur différentes classes d'individus, exprime la loi de mortalité générale et présente une mortalité beaucoup plus rapide que celle de Deparcieux, si ce n'est dans les âges extrêmes de la vie.

Ces tables n'établissent point de différence entre les sexes; cependant, il a été reconnu que dans les âges avancés la longévité des femmes est beaucoup plus grande que celle des hommes.

Les tables de Deparcieux et de Duvillard ont été adoptées par la plupart des Compagnies françaises d'assurances; la première, pour le calcul des rentes viagères et des annuités ou capitaux différés; la seconde, pour le calcul des assurances ou annuités exigibles au cas de décès.

Il existe diverses méthodes pour construire des tables de mortalité; on se bornera ici à indiquer celle que peuvent employer les Compagnies d'assurances pour apprécier la mortalité de leurs assurés ou rentiers viagers.

Digitized by Google

C'est la table qui sera pour elles la plus exacte, puisqu'elle sera déduite de leur propre expérience.

Cette méthode consiste à prendre note des âges auxquels se sont présentés tous ceux qui ont traité avec une Compagnie; à suivre ces individus d'année en année, pendant tout le temps qui s'est écoulé depuis l'époque de leur entrée, jusqu'à celle où s'arrête le travail, en relevant tous les âges successifs par lesquels ils ont passé; à grouper toutes les personnes du même âge, soit à leur entrée, soit pendant la durée des observations; à faire par contre le relevé de tous ceux qui sont morts en les groupant pareillement par âge; et, enfin, à établir le rapport entre le nombre des vivants et celui des décédés. On trouvera ci-après un tableau qui fait voir comment doit être disposé le travail.

La première colonne indique l'âge qu'avaient en entrant ou qu'ont atteint pendant la durée de leurs contrats ceux qui ont traité avec la Compagnie.

La deuxième désigne le nombre des individus qui ont contracté étant plus jeunes et qui ont atteint, pendant leur engagement, l'âge porté à la première colonne.

La troisième fait voir le nombre des souscripteurs à chaque âge. Ces individus étant entrés dans tout le courant de l'année, n'ont pu être observés, en moyenne, que pendant six mois, et ne doivent être comptés dans la première opération que pour la moitié de leur nombre.

La quatrième colonne est la somme des nombres des deuxième et troisième colonne.

La cinquième colonne reproduit les nombres de la quatrième, déduction faite de la moitié des entrants.

La sixième colonne désigne le nombre des décès survenus à chaque âge.

Digitized by Google

La septième indique le nombre, par âge, des personnes existantes à l'époque où s'arrête le travail et qui ne peuvent plus être l'objet d'observations ultérieures ;

Ces nombres, ainsi que ceux des décédés, devront être retranchés de la quatrième colonne, et la différence indique le nombre qui doit être reporté à l'âge suivant et qui figure dans la huitième colonne.

Enfin, la neuvième colonne indique le rapport entre les nombres de la sixième et ceux de la cinquième colonne, et exprime en nombres fractionnaires combien, sur cent individus, il en meurt à chaque âge.

Ce travail étant exécuté, rien n'est plus facile que de construire une table de mortalité.

Supposons un nombre quelconque d'individus de l'âge $a$, il n'y a qu'à le multiplier par la fraction indiquant la mortalité à cet âge, on aura le nombre des décès de l'âge $a$ à l'âge $a + 1$, et retranchant ce nombre de celui des vivants de l'âge $a$, on aura le nombre des vivants de l'âge $a + 1$, et ainsi de suite.

TABLEAU.

| 1 AGE. | 2 REPORT de la 8e col. | 3 ENTRANTS | 4 TOTAL à chaque âge. | 5 TOTAL déduction faite de la moitié des entrants. | 6 DÉCÈS. | 7 SURVIVANTS. | 8 REPORTÉ à la 2e col. | 9 MORTALITÉ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 135 | |
| 44 | 135 | 45 | 180 | 157 1/2 | 2 | 6 | 172 | 1.269 |
| 45 | 172 | 52 | 224 | 198 | 2 | 6 | 216 | 1.010 |
| 46 | 216 | 63 | 279 | 247 1/2 | 3 | 13 | 261 | 1.213 |
| 47 | 261 | 76 | 337 | 299 | 3 | 11 | 323 | 1.003 |
| 48 | 323 | 78 | 401 | 362 | 3 | 22 | 376 | 0.828 |
| 49 | 376 | 104 etc. | 480 | 428 | 5 etc. | 22 | 453 | 1.168 |

Digitized by Google

## DES ANNUITÉS VIAGÈRES SUR UNE TÊTE.

15. Cherchons d'abord quelle est la valeur actuelle d'une somme $S$ exigible après un certain nombre d'années $n$, si une personne désignée est vivante alors.

Si l'exigibilité de la somme n'était soumise à aucune éventualité, sa valeur actuelle serait $S(1+i)^{-n}$ ; mais elle ne doit être payée qu'à $y_{a+n}$ individus, sur $y_a$ vivants aujourd'hui, autrement dit, qu'eu égard à la probabilité pour une personne de l'âge $a$ d'être vivante à l'âge $a+n$; il faut donc multiplier l'expression ci-dessus par $\frac{y_{a+n}}{y_a}$, ce qui donne pour la valeur cherchée :

$$S(1+i)^{-n}\frac{y_{a+n}}{y_a}.$$

16. Une annuité viagère n'est autre chose qu'une série de sommes exigibles annuellement, si une personne est vivante à l'expiration de chaque année. D'après ce qui précède, la somme à recevoir à la fin de la première année, supposée pour plus de simplicité égale à 1 franc, aura pour valeur actuelle $(1+i)^{-1}\frac{y_{a+1}}{y_a}$ ; celle à recevoir dans deux ans vaudra $(1+i)^{-2}\frac{y_{a+2}}{y_a}$, et ainsi de suite jusqu'à la $n^e$ année, de sorte que la valeur de l'annuité pendant $n$ années sera exprimée par :

$$\frac{y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-1}+\frac{y_{a+2}}{y_a}(1+i)^{-2}+\ldots \text{ etc. } +\frac{y_{a+n}}{y_a}(1+i)^{-n}.$$

Digitized by Google

Si la série est prolongée jusqu'à l'âge extrême de la vie $\omega$, on a $a + n = \omega$, d'où $n = \omega - a$. Désignons par $C_a$ le prix de l'annuité viagère, on trouve :

$$C_a = \frac{y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-1} + \frac{y_{a+2}}{y_a}(1+i)^{-2} + \ldots \text{etc.} + \frac{y_\omega}{y_a}(1+i)^{-(\omega-a)}$$

**17.** La formule qui précède serait d'un usage peu commode pour le calcul des rentes viagères, puisqu'il faudrait pour chaque âge calculer toute une série; il est facile d'en trouver une autre qui simplifie l'opération.

En partant de la valeur indiquée ci-dessus pour $C_a$, on reconnaît que :

$$C_{a+1} = \frac{y_{a+2}}{y_{a+1}}(1+i)^{-1} + \frac{y_{a+3}}{y_{a+1}}(1+i)^{-2} + \text{etc.} + \frac{y_\omega}{y_{a+1}}(1+i)^{-(\omega-a-1)}.$$

Si l'on multiplie les deux termes de cette égalité par $\frac{y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-1}$, on a :

$$C_{a+1} \times \frac{y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-1} = \frac{y_{a+2}}{y_a}(1+i)^{-2} + \frac{y_{a+3}}{y_a}(1+i)^{-3} + \ldots \text{etc.},$$
$$+ \frac{y_\omega}{y_a}(1+i)^{-(\omega-a)}.$$

En rapprochant le deuxième membre de cette expression de la valeur de $C_a$, on voit qu'il n'en diffère que par l'absence du premier terme. Donc :

$$C_{a+1}\frac{y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-1} = C_a - \frac{y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-1},$$

d'où l'on tire :

$$C_a = (C_{a+1} + 1)\frac{y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-1}.$$

On peut arriver directement à ce résultat, par la con-

Digitized by Google

sidération suivante : $C_{a+1}$ étant connu, pour trouver la valeur de $C_a$, il faut ajouter à la première quantité le payement de 1 franc qui doit être fait à la fin de l'année et ramener le tout à sa valeur actuelle, eu égard à la chance qu'a la personne de l'âge $a$ d'être vivante à l'âge $a+1$; d'où l'on conclut comme plus haut :

$$C_a = (C_{a+1} + 1)\frac{y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-1}.$$

18. Appliquons la formule qui précède à la formation d'une table de rente viagère :

$\omega$ étant l'âge le plus avancé de la table des vivants $y_{\omega+1} = o$, d'où :

$$C_\omega = 0, \quad C_{\omega-1} = \frac{y_\omega}{y_{\omega-1}}(1+i)^{-1},$$

$$C_{\omega-2} = (C_{\omega-1}+1)\frac{y_{\omega-1}}{y_{\omega-2}}(1+i)^{-1}, \text{ etc}$$

Prenons pour exemple la table de mortalité de Deparcieux et l'intérêt à 4 p. 100. (1)

Les nombres des vivants sont :

95 ans, 0; 94 ans, 1; 93 ans, 2; 92 ans, 4; 91 ans 7; etc.

On déduit de là :

$C_{94} = 0$;

$C_{93} = \frac{1}{2}(1{,}04)^{-1} = 0{,}4807$;

$C_{92} = \frac{2}{4}(0{,}4807+1)(1{,}04)^{-1} = 0{,}7119$;

$C_{91} = \frac{4}{7}(0{,}7119+1)(1{,}04)^{-1} = 0{,}9410$,

et ainsi de suite.

(1) Tous les exemples donnés dans cet ouvrage sont calculés uniformément à l'intérêt de 4 p. 100.

Digitized by Google

19. Il existe une autre méthode pour la détermination des annuités viagères, qui n'est pas plus simple en elle-même, mais qui facilite la solution de beaucoup de questions accessoires.

Reprenons la formule 16,

$$C_a = \frac{y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-1} + \frac{y_{a+2}}{y_a}(1+i)^{-2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{y_{\omega-1}}{y_a}(1+i)^{-(\omega-a-1)} + \frac{y_\omega}{y_a}(1+i)^{-(\omega-a)}.$$

Si l'on multiplie les deux termes de cette égalité par $y_a\,(1+i)^{\omega-a}$, on trouve :

$$C_a \times y_a\,(1+i)^{\omega-a} = y_{a+1}\,(1+i)^{\omega-a-1} + y_{a+2}(1+i)^{\omega-a-2}\ldots.$$
$$+ y_{\omega-1}\,(1+i) + y_\omega.$$

Les termes de cette série ne sont autre chose que les nombres de la table de mortalité multipliés, le dernier par $(1+i)^0$, le précédent par $1+i$, l'antérieur par $(1+i)^2$ et ainsi de suite ; il est à remarquer, de plus, que le multiplicateur de $C_a$ est lui-même un terme de cette série, de sorte que si on le désigne par $T_a$, on aura :

$$C_a \times T_a = T_{a+1} + T_{a+2} + \ldots\ldots + T_{\omega-1} + T_\omega.$$

En supposant les termes du deuxième membre totalisés, et en appelant la somme $S_{a+1}$, on aura $C_a \times T_a = S_{a+1}$, d'où :

$$C_a = \frac{S_{a+1}}{T_a}.$$

20. Voici maintenant comment on opère d'après la formule précédente, pour la formation d'une table d'annuités :

Digitized by Google

Prenant toujours pour base le nombre des vivants d'après Deparcieux, et l'intérêt à 4 p. 100, on aura :

| | | $T_a$ | $S_a$ |
|---|---|---|---|
| à 94 ans, | $1\ (1{,}04)^0 =$ | 1 | 1 |
| 93 ans, | $2\ (1{,}04)^1 =$ | 2.08 | 3.08 |
| 92 ans, | $4\ (1{,}04)^2 =$ | 4.33 | 7.41 |
| 91 ans, | $7\ (1{,}04)^3 =$ | 7.87 | 15.28 |
| 90 ans, | $11\ (1{,}04)^4 =$ | 12.87 | 28.15 |
| Etc., etc. | | | |

On déduit de là :

$$C_{93} = \frac{1}{2.08} = 0{,}4807;$$

$$C_{92} = \frac{3.08}{4.33} = 0{,}7119;$$

$$C_{91} = \frac{7.41}{7.87} = 0{,}9410;$$

$$C_{90} = \frac{15.28}{12.87} = 1{,}1873,$$

et ainsi de suite.

En examinant le tableau ci-dessus, on voit que la 2e colonne indique la somme des nombres de la précédente, y compris celui de même rang ; on conclut de là que :

$$S_a = S_{a+1} + T_a$$
$$S_{a+1} - S_{a+n+1} = T_{a+1} + T_{a+2} + \text{etc.} + T_{a+n}.$$

21. On a déterminé précédemment la valeur d'une annuité viagère, c'est-à-dire d'une rente exigible annuellement. Le plus ordinairement, la rente est payable par semestre ou par trimestre.

Lorsque la rente est payable par semestre, le second terme étant exigible à la fin de chaque année, la série de

Digitized by Google

ces seconds termes peut être considérée comme une annuité de $\frac{1}{2}$ franc.

Sa valeur est donc $\frac{1}{2} C_a$.

Quant à la série des premiers termes exigibles au milieu de l'année, on peut la considérer très-approximativement, comme une moyenne entre une annuité de $\frac{1}{2}$ payable fin d'année et une annuité semblable qui serait payable d'avance, au commencement de chaque année, c'est-à-dire entre $\frac{1}{2} C_a$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} C_a$, soit $\frac{1}{2} C_a + \frac{1}{4}$. En y ajoutant la valeur des seconds termes qui est de $\frac{1}{2} C_a$, on aura pour l'expression de l'annuité viagère semestrielle $C_a + \frac{1}{4}$.

Si la rente est trimestrielle, on peut, en poursuivant le même raisonnement, la décomposer en deux séries, celle des 2e et 4e termes, qui, étant considérée comme une rente annuelle de $\frac{1}{2}$ franc payable par semestre, aura pour valeur la moitié de celle ci-dessus, soit $\frac{C_a}{2} + \frac{1}{8}$.

Quant à la série des 1er et 3e termes, il suffit de remarquer qu'une rente de $\frac{1}{2}$ franc payable par $\frac{1}{4}$ de franc au bout de 3 et 9 mois, est à peu près équivalente à une pareille rente payable en un seul terme au milieu de l'année, et dont la valeur, suivant l'un des paragraphes précédents, est égale à $\frac{1}{2} C_a + \frac{1}{4}$. En ajoutant à cette dernière quantité la valeur des 2e et 4e termes, soit $\frac{1}{2} C_a + \frac{1}{8}$, on aura pour la valeur cherchée $C_a + \frac{3}{8}$.

En généralisant, on trouvera que si la rente est

Digitized by Google

payable en $n$ termes, sa valeur est $C_a + \frac{n-1}{2n}$, quantité qui se rapproche d'autant plus de $C_a + \frac{1}{2}$ que $n$ est plus grand.

22. Si l'on veut déterminer exactement la valeur d'une annuité payable par moitié, semestriellement, on trouve :

$$\frac{1}{2y_a}\left\{\frac{y_a+y_{a+1}}{2}(1+i)^{-\frac{1}{2}}+y_{a+1}(1+i)^{-1}+\frac{y_{a+1}+y_{a+2}}{2}(1+i)^{-\frac{3}{2}}\right\}$$
$$+\,y_{a+2}\,(1+i)^{-2}+\text{etc.}$$

qu'on peut décomposer ainsi :

$$1^{\circ}\ \frac{1}{2y_a}\left(y_{a+1}\,(1+i)^{-1}+y_{a+2}\,(1+i)^{-2}+\text{etc.}\right)=\frac{1}{2}\,C_a,$$

$$2^{\circ}\ \frac{1}{4y_a}\,(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left\{\,y_a+y_{a+1}\,(1+i)^{-1}+y_{a+2}\,(1+i)^{-2}+\text{etc.}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\,(1+i)^{-\frac{1}{2}}\times(1+C_a),$$

$$3^{\circ}\ \frac{1}{4y_a}(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left\{y_{a+1}+y_{a+2}\,(1+i)^{-1}+y_{a+3}\,(1+i)^{-2}+\text{etc.}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\,(1+i)^{-\frac{1}{2}}\times C_a\,(1+i).$$

Si l'on réunit ces trois expressions, on obtient pour la somme :

$$C_a\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(1+i)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}(1+i)^{-\frac{1}{2}}(1+i)\right\}+\frac{1}{4}(1+i)^{-\frac{1}{2}},$$

ou bien :

$$C_a\times\frac{1}{4}\,(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left\{2\,(1+i)^{\frac{1}{2}}+1+i+1\right\}+\frac{1}{4}(1+i)^{-\frac{1}{2}};$$

qu'on peut encore mettre sous cette forme :

Digitized by Google

$$C_a \times \frac{1}{4}(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left\{(1+i)^{\frac{1}{2}}+1\right\}^2+\frac{1}{4}(1+i)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on prend pour exemple l'intérêt de 4 p. 100, on aura en faisant le calcul :

$$C_a \times 1{,}000095 + 0{,}24545.$$

On voit que $C_a$ est multiplié par une quantité qui n'excède l'unité que d'une très-faible fraction et que la quantité indépendante de $C_a$ n'est inférieure à $\frac{1}{4}$ que d'une très-petite quantité.

L'approximation que nous avons indiquée est donc bien suffisante en pratique.

Pour la rente trimestrielle, on trouverait des résultats analogues.

**23.** A moins de stipulations contraires, la rente viagère est due jusqu'au jour du décès; il faut donc ajouter au prix de la rente la valeur du décompte calculé en raison du temps qui s'écoule depuis le dernier terme échu jusqu'au jour de la mort.

Lorsque la rente est payable par annuité, ce décompte est en moyenne de six mois, soit $\frac{1}{2}$ franc; si elle est payable par semestre, le décompte est de trois mois ou $\frac{1}{4}$ de franc, et ainsi de suite. On verra plus loin que la valeur actuelle d'une somme $S$, exigible au décès d'une personne de l'âge $a$, est de $S\,(1 - i\,C_a)$. Donc, quand la rente est payable par année, il faut y ajouter pour la valeur des arrérages $\frac{1}{2}(1 - i\,C_a)$, ce qui donnera $C_a\left(1-\frac{i}{2}\right)+\frac{1}{2}$.

Digitized by Google

Si la rente est payable par semestre, il faut ajouter à sa valeur $C_a + \frac{1}{4}$ la quantité $\frac{1}{4}(1 - i\,C_a)$, ce qui donnera $C_a\left(1 - \frac{i}{4}\right) + \frac{1}{2}$.

On trouvera de même que pour la rente trimestrielle on doit ajouter $\frac{1}{8}(1 - i\,C_a)$, ce qui produit $C_a\left(1 - \frac{i}{8}\right) + \frac{1}{2}$.

En général, on reconnaîtra que le prix d'une rente servie en $n$ payements, avec arrérages jusqu'au décès, est de $C_a\left(1 - \frac{i}{2n}\right) + \frac{1}{2}$, quantité qui a pour limite $C_a + \frac{1}{2}$. Il résulte de là que plus $n$ est grand, plus la valeur de l'annuité avec décompte se rapproche de celle de l'annuité sans décompte.

**24.** Lorsqu'une annuité doit être servie à une personne sa vie durant, et, après sa mort, pendant un certain nombre d'années, à ses héritiers, sa valeur est :

$$C_a + (1 - i\,C_a)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + C_a(1+i)^{-n}.$$

En se rendant compte de cette formule, on voit qu'elle indique le prix d'une annuité certaine pendant $n$ années, plus le prix d'une rente viagère immédiate, mais dont on ne se dessaisit que dans $n$ années. En effet, la rente et l'annuité ne doivent pas être payées simultanément, et, d'après les termes de la question, la rente doit être servie d'abord, et l'annuité ensuite. Mais rien n'empêche

Digitized by Google

de supposer que l'annuité est payée d'abord, et que la rente viagère, tout en étant acquise, est mise en réserve, pour n'être payée qu'à l'expiration de l'annuité ; c'est là ce qui est indiqué par la formule.

Si l'on paye au décès un an de pension, comme cela se pratique dans quelques sociétés, la formule se réduit à :

$$(1 + C_n)(1 + i)^{-1}.$$

Digitized by Google

## DES CAPITAUX ET ANNUITÉS DIFFÉRÉS

### A PRIMES UNIQUES OU ANNUELLES.

25. Appelons $Q_a^n$ la valeur d'une somme de 1 franc à recevoir dans $n$ années; si une personne de l'âge $a$ est vivante alors, on a vu au n° 15 que

$$Q_a^n = \frac{y_{a+n}}{y_a}(1+i)^{-n}.$$

Si l'on veut se servir des annotations ou procédés plus simples du n° 19, on verra que $T_{a+n} = y_{a+n}(1+i)^{\omega-a-n}$ et que $T_a = y_a(1+i)^{\omega-a}$; donc $Q_a^n = \frac{T_{a+n}}{T_a}$.

Supposons, par exemple, que l'on demande le prix d'une assurance de 3,000 francs exigible, si un enfant de 4 ans est vivant dans 16 ans, soit à l'âge de 20 ans; en calculant d'après la mortalité de Deparcieux qui nous servira dans les exemples de ce chapitre, on aura, d'après la première formule,

$$Q_4^{16} = \frac{y_{20}}{y_4}(1+i)^{-16} = \frac{814}{970}(1{,}04)^{-16},$$

ou, en se servant des logarithmes,

$$\log Q_4^{16} = \log 814 + \text{compl. log. } 970 + \text{compl. } 16 \log 1{,}04.$$

On trouvera ainsi $Q_4^{16} = 0{,}4480$, et en multipliant cette quantité par 3,000 francs, ou en ajoutant préalablement le logarithme de 3,000, on aura pour le prix demandé 1,344 fr.

Digitized by Google

Si l'on possède une table d'annuités calculée d'après la méthode n° 20, on aura :

$$Q_4^{16} = \frac{T_{20}}{T_4} = \frac{14828{,}31}{33095{,}75},$$

ou

$$\log. Q_4^{16} = \log 14828{,}31 + \text{compl. log } 33095{,}75,$$

d'où l'on déduit comme ci-dessus :

$$Q_4^{16} = 0{,}4480.$$

26. Appelons pareillement $C_a^n$ la valeur d'une annuité viagère à l'âge $a$ dont on ne jouira qu'après $n$ années et cherchons sa valeur.

Le rentier étant alors âgé de $a + n$ années, la rente sur sa tête aura pour expression $C_{a+n}$, quantité qu'il faut ramener à sa valeur actuelle. D'où

$$C_a^n = C_{a+n} \times \frac{y_{a+n}}{y_a} (1+i)^{-n} = C_{a+n} \times Q_a^n.$$

Si l'on se sert des procédés du n° 19, on a

$$C_{a+n} = \frac{S_{a+n+1}}{T_{a+n}}, \quad Q_a^n = \frac{T_{a+n}}{T_a}, \quad \text{d'où } C_a^n = \frac{S_{a+n+1}}{T_a}.$$

Recherchons quel est le prix d'une annuité viagère de 360 francs payable à une personne âgée de 30 ans, à dater de l'âge de 60 ans.

D'après la première formule, on aura :

$$C_{30}^{30} = C_{60} \times \frac{y_{60}}{y_{30}} (1{,}04)^{-30} = C_{60} \times Q_{30}^{30}.$$

$Q_{30}^{30}$ calculé, comme dans l'exemple précédent, est égal à 0,19449,

$C_{60}$ d'après la table d'annuité vaut 9,713,

D'où $C_{30}^{30} = 9{,}713 \times 0{,}19449 = 1{,}889.$

Digitized by Google

Donc le prix d'une annuité de 360 francs est de :

$$360 \times 1{,}889 = 680 \text{ fr.}$$

Si, au lieu d'une annuité, il s'agissait d'une rente viagère semestrielle avec arrérages jusqu'au décès, il suffirait de modifier le prix de l'annuité conformément au n° 23 et de remplacer, dans le calcul précédent, le nombre 9,713 par $9{,}713\ (1 - 0{,}01) + \frac{1}{2} = 10{,}116$.
On aurait ainsi pour le prix cherché 708 fr.

Si l'on fait usage de la 2e formule, on trouvera :

$$C_{30}^{30} = \frac{S_{61}}{T_{30}} = \frac{17063{,}50}{9032{,}95},$$

$$\text{ou } \log C_{30}^{30} = \log 17063{,}50 + \text{compl. } \log 9032{,}95 = 1{,}889.$$

27. L'annuité temporaire est celle dont on ne jouit que pendant $n$ années ; elle est évidemment égale à une annuité payable pendant toute la vie, moins une annuité différée de $n$ années; sa valeur est donc :

$$C_a - C_a^n \text{ ou bien } \frac{S_{a+1} - S_{a+n+1}}{T_a}.$$

L'annuité temporaire peut être en même temps différée, c'est-à-dire qu'on peut stipuler qu'on en jouira dans un délai de $n$ années et pendant $n'$ années. Son expression sera alors :

$$C_a^n - C_a^{n+n'} \text{ ou bien } \frac{S_{a+n+1} - S_{a+n+n'+1}}{T_a}.$$

28. Quelquefois l'annuité temporaire se perçoit d'avance. Dans ce cas, si le nombre des payements est $n$, le



Digitized by Google

dernier a lieu après $n-1$ année ; une telle annuité a pour expression :

$$1 + C_a - C_a^{n-1} = 1 + C_a - C_{a+n-1} \times Q_a^{n-1}.$$

On peut la simplifier en remarquant que d'après le n° 17 :

$$C_{a+n-1} = (1 + C_{a+n}) \frac{y_{a+n}}{y_{a+n-1}} (1+i)^{-1},$$

donc

$$C_{a+n-1} \times Q_a^{n-1} = (1+C_{a+n}) \frac{y_{a+n}}{y_{a+n-1}} (1+i)^{-1} \times \frac{y_{a+n-1}}{y_a} (1+i)^{-(n-1)}$$
$$= (1 + C_{a+n})\, Q_a^n.$$

Il résulte de là qu'une annuité temporaire de $n$ années payable d'avance a pour expression :

$$1 + C_a - (1 + C_{a+n})\, Q_a^n .$$

Si l'on se sert des annotations du n° 19, cette expression se transforme comme suit :

$$1 + \frac{S_{a+1}}{T_a} - \left(1 + \frac{S_{a+n+1}}{T_{a+n}}\right) \frac{T_{a+n}}{T_a},$$

mais

$$1 + \frac{S_{a+1}}{T_a} = \frac{T_a + S_{a+1}}{T_a} = \frac{S_a}{T_a};$$

de même :

$$1 + \frac{S_{a+n+1}}{T_{a+n}} = \frac{S_{a+n}}{T_{a+n}};$$

donc l'expression ci-dessus se réduit à $\frac{S_a - S_{a+n}}{T_a}$.

29. D'après ce qui précède, il sera facile de déterminer la prime annuelle à payer pour obtenir un capital différé.

Digitized by Google

Cette prime n'est, en effet, qu'une annuité viagère temporaire, laquelle se paye d'avance pendant un certain nombre d'années ordinairement égal à celui du différé. Donc, en divisant la valeur du capital différé par celle d'une annuité temporaire, on trouve la prime exigible.

Désignons cette prime par $q_a^n$ ; on aura :

$$q_a^n = \frac{Q_a^n}{1 + C_a - (1 + C_{a+n})\, Q_a^n},$$

ou bien :

$$q_a^n = \frac{T_{a+n}}{S_a - S_{a+n}}.$$

Reprenons l'exemple du n° 25 et cherchons quelle est la prime annuelle pendant 16 ans pour obtenir une somme de 3,000 francs si un enfant de 4 ans est vivant à 20 ans.

D'après la première formule, on a :

$$q_4^{16} = \frac{Q_4^{16}}{1 + C_4 - (1 + C_{20})\, Q_4^{16}}.$$

On a trouvé que $Q_4^{16} = 0{,}4480$ ; on trouvera dans la table d'annuité que $C_4 = 18{,}5590$ et que $C_{20} = 17{,}9380$ ; on aura donc :

$$q_4^{16} = \frac{0{,}4480}{19{,}5590 - 18{,}9380 \times 0{,}4480} = 0{,}04046,$$

soit, pour 3,000 francs, 121 fr. 38 c.

D'après la 2e formule, on trouvera

$$q_4^{16} = \frac{T_{20}}{S_4 - S_{20}} = \frac{14828{,}31}{647317{,}85 - 280819{,}19}.$$

En effectuant les calculs, on obtiendra les mêmes résultats que ci-dessus.

Digitized by Google

30. Désignons par $d_a^n$ la prime annuelle à payer pour obtenir une rente viagère de 1 fr. différée de $n$ années ; on aura, en opérant comme dans le numéro précédent :

$$d_a^n = \frac{C_{a+n} Q_a^n}{1 + C_a - (1 + C_{a+n}) Q_a^n} = C_{a+n} q_a^n ;$$

ou bien :

$$d_a^n = \frac{S_{a+n+1}}{T_{a+n}} \times \frac{T_{a+n}}{S_a - S_{a+n}} = \frac{S_{a+n+1}}{S_a - S_{a+n}} .$$

La prime étant exigible d'avance et l'annuité ne se payant qu'en fin d'année, il est évident qu'à la fin de la $n^e$ année, il n'y aura rien à payer ni à recevoir, mais s'il ne devait pas y avoir d'intermittence et si l'annuité se payait d'avance, on aurait :

$$d_a^n = \frac{(1 + C_{a+n}) Q_a^n}{1 + C_a - (1 + C_{a+n}) Q_a^n} = \frac{S_{a+n}}{S_a - S_{a+n}} .$$

Revenons à l'exemple du n° 26, et recherchons quelle est la prime annuelle pendant 30 ans d'une annuité viagère de 360 francs, payable en fin d'année à une personne âgée de 30 ans, à dater de l'âge de 60 ans ; on aura, d'après la première formule ci-dessus :

$$d_{30}^{30} = \frac{C_{60} Q_{30}^{30}}{1 + C_{30} - (1 + C_{60}) Q_{30}^{30}} .$$

Le numérateur a pour valeur, comme on l'a vu au n° 26, 1,889 et $Q_{30}^{30} = 0,19449$. D'après la table d'annuités, $C_{30} = 16,8095$ et $C_{60} = 9,7130$ ; on a donc :

$$d_{30}^{30} = \frac{1,889}{17,8095 - 10,7130 \times 0,19449} = 0,1201 ,$$

Digitized by Google

ce qui, pour une annuité de 360 francs, donne une prime de 43 fr. 24 c.

En se servant de la 2e formule, on trouve :

$$d_{30}^{30} = \frac{S_{61}}{S_{30} - S_{60}} = \frac{17063{,}50}{160872{,}65 - 18820{,}27} = 0{,}1201,$$

comme ci-dessus.

31. Si au lieu d'une rente viagère on veut acquérir une annuité temporaire différée, la prime annuelle, payable pendant le temps du différé, sera :

$$\frac{C_a^n - C_a^{n+n'}}{1 + C_a - (1 + C_{a+n})\, Q_a^n} \quad \text{ou bien} \quad \frac{S_{a+n+1} - S_{a+n+n'+1}}{S_a - S_{a+n}}.$$

Demandons-nous, par exemple, quelle sera la prime annuelle d'une annuité temporaire de 500 francs, payable pendant 15 ans sur la tête d'un enfant d'un an, lorsqu'il aura atteint l'âge de 6 ans. Il faudra calculer :

$$\frac{S_7 - S_{22}}{S_1 - S_6} = \frac{553783{,}94 - 251873{,}02}{763202{,}83 - 583121{,}01} = \frac{301910{,}92}{180081{,}82} = 1{,}6765,$$

soit pour une annuité de 500 francs une prime de 838 fr. exigible pendant 5 ans.

32. Il est facile, d'après ce qui précède, de résoudre cette question :

Quel intérêt viager doit-on accorder à une personne qui place une somme viagèrement pour quelques années, à condition que cette somme lui sera rendue, si elle est vivante, à l'expiration de ce nombre d'années?

Soit 1 franc la somme versée, comme elle doit être rendue dans $n$ années si celui qui place est vivant, la valeur actuelle de cette restitution est $\frac{T_{a+n}}{T_a}$ et la somme

Digitized by Google

cédée a pour expression $\frac{T_a - T_{a+n}}{T_a}$ ; d'un autre côté, une annuité viagère temporaire de 1 franc est représentée par $\frac{S_{a+1} - S_{a+n+1}}{T_a}$.

Il suffit donc d'établir cette proportion :

$$\frac{S_{a+1} - S_{a+n+1}}{T_a} : 1 :: \frac{T_a - T_{a+n}}{T_a} : x,$$

d'où :

$$x = \frac{T_a - T_{a+n}}{S_{a+1} - S_{a+n+1}}.$$

On demande, par exemple, de quel intérêt viager on fera jouir, pendant 10 ans, un homme âgé de 50 ans, à condition de restitution de son capital, au bout de 10 ans, s'il existe à cette époque; on aura :

$$\frac{T_{50} - T_{60}}{S_{51} - S_{61}} = \frac{3263{,}20 - 1756{,}77}{40873{,}55 - 17063{,}50}$$

$$= \frac{1506{,}43}{23810{,}05} = 0{,}0633 ;$$

soit, pour 100 francs, 6 fr. 33 c.

33. On peut résoudre encore facilement ce problème :

Quel serait le prix d'une rente différée à condition que ce prix sera restitué au décès à quelque époque qu'il arrive?

Celui qui fait ce placement n'expose réellement que l'intérêt, sa vie durant, de la somme versée, soit $X i C_a$ si l'on désigne par $X$ cette somme ; on aura donc $X i C_a = C_a^n$, d'où $X = \frac{C_a^n}{i C_a}$ ; ou bien, en se servant des annotations du n° 19 :

$$X = \frac{S_{a+n+1}}{i S_{a+1}}$$

Digitized by Google

Si l'on veut acquérir la rente différée, au moyen d'une prime annuelle payable d'avance pendant $n$ années, et dont le montant doit être restitué au décès, on peut la déterminer par des considérations analogues.

En désignant par $x$ cette prime, la somme exposée pendant la première année sera $x\,i\,C_a$; la 2e année, elle aura pour expression $x\,i\,C_a^1$; la 3e année, $x\,i\,C_a^2$; etc. On aura donc l'équation :

$$x\,i\left(C_a^1 + C_a^2 + \text{etc.} + C_a^{n-1}\right) = C_a^n$$

ou bien :

$$x\,i\,(S_{a+1} + S_{a+2} + \text{etc.} + S_{a+n}) = S_{a+n+1}.$$

Si l'on désigne par $\Sigma\, S_{a+1}$ la somme des nombres $S_{a+1}$, $S_{a+2}$, etc., jusqu'aux limites de la table, on aura, par analogie avec ce qui a été dit au n° 20 :

$$S_{a+1} + S_{a+2} + \text{etc.} + S_{a+n} = \Sigma\, S_{a+1} - \Sigma\, S_{a+n+1},$$

d'où :

$$x = \frac{S_{a+n+1}}{i\,(\Sigma\, S_{a+1} - \Sigma\, S_{a+n+1})}.$$

*Exemples :* On demande le prix, à 30 ans, d'une rente différée de 20 ans, c'est-à-dire exigible à l'âge de 50 ans, ce prix devant être remboursé au décès.

La prime unique sera représentée par :

$$\frac{S_{51}}{i\,S_{31}} = \frac{40873{,}55}{0{,}04 \times 151839{,}70} = \frac{40873{,}55}{6073{,}58} = 6{,}729.$$

La prime annuelle sera égale à

$$\frac{S_{51}}{i\,(\Sigma\, S_{31} - \Sigma\, S_{51})}.$$

Digitized by Google

La somme $\Sigma S_{31} - \Sigma S_{81}$ s'obtiendra en additionnant $S_{31} + S_{32} +$ etc., jusques et y compris $S_{80}$, et elle est égale à 1799322,66; nous aurons donc à calculer :

$$\frac{40873,55}{0,04 \times 1799322,66} = \frac{40873,55}{71972,90} = 0,568.$$

**34.** Si le prix de la rente doit être restitué à l'expiration du différé, ou de suite en cas de décès avant cette époque, le rentier n'aliénant que l'intérêt viager temporaire de la somme versée, on aura :

$$Xi\left(C_a - C_a^n\right) = C_a^n, \text{ d'où } X = \frac{C_a^n}{i\left(C_a - C_a^n\right)};$$

ou bien ;

$$X = \frac{S_{a+n+1}}{i\left(S_{a+1} - S_{a+n+1}\right)}.$$

Enfin, on peut supposer que le prix de la rente ne sera rendu que si le rentier décède avant l'entrée en jouissance de la rente, et alors, outre l'intérêt viager temporaire, il expose un capital qui, devant être perdu pour lui au cas de vie, a pour expression $X \times Q_a^n$ ; on aura, dans ce cas :

$$X\left(i\left(C_a - C_a^n\right) + Q_a^n\right) = C_a^n,$$

d'où

$$X = \frac{C_a^n}{i\left(C_a - C_a^n\right) + Q_a^n}.$$

ou bien :

$$X = \frac{S_{a+n+1}}{T_{a+n} + i\left(S_{a+1} - S_{a+n+1}\right)}.$$

Cherchons quel sera, dans ces deux cas, le prix unique à 30 ans d'une rente différée de 20 ans.

Digitized by Google

Si le prix doit être restitué en tout cas et au plus tard à l'expiration du différé, il faudra calculer :

$$\frac{S_{51}}{i(S_{31}-S_{51})}=\frac{40873,55}{0,04\,(151839,70-40873,55}$$
$$=\frac{40873,55}{4438,64}=9,208.$$

Si le prix ne doit être restitué qu'au cas de décès avant l'entrée en jouissance, nous aurons :

$$\frac{S_{51}}{T_{50}+i\,(S_{31}-S_{51})}=\frac{40873,55}{3263,20+4438,64}$$
$$=\frac{40873,55}{7701,84}=5,307.$$

Digitized by Google

## DES SOMMES EXIGIBLES EN CAS DE DÉCÈS.

35. On a vu au n° 10, que la probabilité qu'une personne de l'âge $a$ meure dans l'année est exprimée par $\frac{y_a - y_{a+1}}{y_a}$.

Si une somme de 1 franc doit être payée à la fin de l'année, le décès étant survenu, la valeur de cette somme est $\frac{y_a - y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-1}$.

De même, si une somme de 1 franc doit être payée à la fin de la deuxième année, en cas de décès dans cette année, sa valeur actuelle est $\frac{y_{a+1} - y_{a+2}}{y_a}(1+i)^{-2}$ et ainsi de suite pour les années suivantes.

Si enfin l'on admet que cette somme de 1 franc doit être payée au décès, à quelque époque qu'il ait lieu, et si l'on désigne par $P_a$, le prix d'une semblable opération, on aura :

$$P_a = \frac{y_a - y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-1} + \frac{y_{a+1} - y_{a+2}}{y_a}(1+i)^{-2} + \ldots\ldots + \frac{y_{a+n-1} - y_{a+n}}{y_a}(1+i)^{-n} + \text{etc.}$$

ou bien :

$$P_a(1+i) = 1 + \frac{y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-1} + \frac{y_{a+2}}{y_a}(1+i)^{-2} \ldots + \frac{y_{a+n-1}}{y_a}(1+i)^{-(n-1)} + \text{etc.} - \left(\frac{y_{a+1}}{y_a} + \frac{y_{a+2}}{y_a}(1+i)^{-1} \ldots + \frac{y_{a+n}}{y_a}(1+i)^{-(n-1)} + \text{etc.}\right);$$

Digitized by Google

chaque série étant prolongée jusqu'aux limites de la table de mortalité.

La somme des termes positifs est égale à $1 + C_a$ ; la somme des termes négatifs est équivalente à $C_a\,(1+i)$. Donc on a :

$$P_a\,(1+i) = 1 + C_a - (1+i)\,C_a = 1 - i\,C_a\,;$$

d'où :
$$P_a = \frac{1 - i\,C_a}{(1+i)}.$$

Si la somme due au décès doit être payée immédiatement au lieu de l'être en fin d'année, comme les décès se répartissent dans tout le cours de l'année, on peut admettre qu'ils ont lieu, terme moyen, au bout de six mois, et dans ce cas l'expression ci-dessus devant être multipliée par $(1+i)^{\frac{1}{2}}$, deviendra $\frac{1 - i\,C_a}{(1+i)^{\frac{1}{2}}}$, et si l'on néglige le diviseur qui n'a pas grande importance quand le taux de l'intérêt est faible, on a pour le prix unique d'une assurance de 1 franc contractée pour la vie entière,

$$P_a = 1 - i\,C_a$$

On pourrait arriver directement à ce résultat, par les considérations suivantes :

Une somme réalisable seulement au décès d'une personne est un capital du revenu duquel on est privé pendant toute la vie de cette personne. Pour estimer cette nue-propriété, il faut retrancher du capital à recevoir, la valeur de l'intérêt viager dont il est grevé. Soit 1 franc ce capital, son revenu est $i$; la valeur actuelle de cet intérêt sur une tête de l'âge $a$ est $i\,C_a$ ; donc $1 - iC_a$ est le prix cherché.

36. Le prix de l'assurance est acquitté ordinairement en une annuité viagère dite *prime* payable d'avance

Digitized by Google

pendant toute la vie de la personne, ou pendant un nombre limité d'années. Si l'on désigne la prime dans le premier cas par $p_a$, on a $p_a = \frac{P_a}{1 + C_a}$.

Désignons par $p_a^n$ la prime exigible pendant $n$ années seulement; on a, d'après le n° 28 :

$$p_a^n = \frac{P_a}{1 + C_a - (1 + C_{a+n})\, Q_a^n}, \quad (1)$$

ou bien, ce qui est d'un calcul plus facile,

$$p_a^n = \frac{P_a \times T_a}{S_a - S_{a+n}}.$$

Cherchons, par exemple, quels seraient le prix unique, la prime annuelle viagère et la prime pendant dix ans seulement, d'une assurance de 100 francs sur une tête de 40 ans, et servons-nous pour ce calcul de la table d'annuités viagères formée d'après la loi de mortalité de Duvillard, que nous emploierons dans tous les exemples de ce chapitre.

On trouve que $C_{40} = 13{,}2856$. Donc :

$$P_{40} \times 100 = 100\,(1 - 0{,}04 \times 13{,}2856) = 46{,}857\,;$$

$$p_{40} \times 100 = \frac{46{,}857}{1 + 13{,}2856} = 3{,}280\,;$$

$$p_{40}^{10} \times 100 = \frac{100\, P_{40} \times T_{40}}{S_{40} - S_{50}} = \frac{46{,}857 \times 5530980}{79013500 - 36106428}$$

---

(1) On a vu au n° 29, que $q_a^n = \frac{Q_a^n}{1 + C_a - (1 + C_{a+n}) Q_a^n}$, d'où $\frac{q_a^n}{Q_a^n} = \frac{1}{1 + C_a - (1 + C_{a+n}) Q_a^n}$; donc $p_a^n = P_a \times \frac{q_a^n}{Q_a^n}$ expression plus simple analytiquement, mais dont le calcul ne sera plus facile que si l'on a obtenu d'avance les quantités $q_a^n$ et $Q_a^n$.

Digitized by Google

formule qui se calcule facilement par les logarithmes et qui se résout par :

$$\log 46{,}857 + \log 5530980 + \text{compl. log } 42907072,$$

d'où l'on déduit :

$$p_{40}^{10} \times 100 = 6{,}040.$$

37. L'assurance, au lieu d'être consentie pour toute la durée de la vie, peut être limitée à quelques années. Dans ce cas, la somme assurée n'est exigible que si le décès survient dans la limite de temps fixée. C'est ce qu'on appelle une assurance temporaire.

Pour déterminer le prix de cette assurance que nous désignerons par $P_a^n$, il suffit de retrancher du prix d'une assurance pour la vie entière à l'âge $a$ celle d'une assurance semblable à l'âge $a+n$, ramenée à sa valeur actuelle; on aura donc :

$$P_a^n = P_a - P_{a+n}\, Q_a^n .$$

La prime annuelle se détermine comme dans le dernier cas du numéro précédent.

Si l'assurance est limitée à la durée d'un an, l'expression ci-dessus se réduit à :

$$P_a^1 = P_a - P_{a+1}\, Q_a^1 = 1 - i\, C_a - (1 - i C_{a+1})\, Q_a^1 .$$

mais $C_a = (1+C_{a+1})\, Q_a^1$ ; substituant cette valeur dans l'expression précédente et réduisant, on a :

$$P_a^1 = 1 - Q_a^1 (1+i) = 1 - \frac{y_{a+1}}{y_a}.$$

En effet, dans ce cas, le prix de l'assurance doit être égal à la probabilité de mort dans l'année.

*Exemple* : Quelle est la prime unique ou annuelle

Digitized by Google

d'une assurance temporaire de dix ans, à l'âge de 40 ans et pour une somme de 100 francs? On aura :

$$100 \times P_{40}^{10} = \left(P_{40} - P_{50} \times Q_{40}^{10}\right) 100.$$

On a vu que $P_{40} \times 100 = 46{,}857$.

D'après la table d'annuités, $C_{50} = 11{,}016$; d'où

$$P_{50} \times 100 = 55{,}936.$$

$$Q_{40}^{10} = \frac{T_{50}}{T_{40}} = \frac{300487}{553098} = 0{,}5433, \text{ par conséquent :}$$

$$100 \times P_{40}^{10} = 46{,}857 - 55{,}936 \times 0{,}5433 = 16{,}468.$$

Pour déterminer la prime annuelle pendant dix ans, il faut opérer comme dans l'exemple précédent, en substituant 16,468 au nombre 46,857. On trouvera ainsi pour la prime cherchée 2 fr. 123

38. Il est facile de déduire de ce qui précède la valeur d'un capital exigible, si le décès a lieu après un certain nombre d'années; dans ce cas, comme l'assurance ne sera jamais payée avant que l'assuré ait atteint l'âge $a+n$, son expression sera $P_{a+n}$, qu'il faut ramener à sa valeur actuelle, soit $P_{a+n} \times Q_a^n$.

C'est ce que quelques auteurs appellent une assurance différée, terme que les assureurs français réservent dans leur pratique pour les assurances exigibles au cas de vie.

On obtiendra la prime annuelle comme ci-dessus.

Supposons, par exemple, une assurance de 100 francs payable au décès d'un homme de 40 ans, pourvu que ce décès ne survienne qu'après 10 ans; le prix de cette assurance sera $P_{50} \times Q_{40}^{10} \times 100, = 55{,}936 \times 0{,}5433 = 30{,}390$.

En divisant par $1+C_{40}$, soit 14,2856, on trouve pour la prime annuelle payable pendant toute la vie, 2 fr. 127.

Digitized by Google

39. Lorsqu'on emprunte un capital remboursable en tant d'années par annuités, ou bien si l'on se fait faire une avance pour quelques années sur une rente viagère, l'assurance temporaire peut avoir pour objet de garantir, à dater du décès de l'emprunteur, le payement de l'annuité jusqu'au parfait remboursement de la somme empruntée. Dans ce cas, on peut considérer l'assureur comme payant l'annuité au lieu et place de l'emprunteur et la recevant de lui tant qu'il est vivant; le prix de l'assurance sera donc égal à la différence entre une annuité certaine pendant un nombre $n$ d'années et une annuité viagère de même durée. On a vu au n° 5 qu'une annuité certaine de 1 fr. est égale à $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, que pour plus de simplicité nous désignons par $I_n$; d'un autre côté, l'annuité viagère temporaire a pour expression $\frac{S_{a+1}-S_{a+n+1}}{T_a}$; donc le prix de l'assurance dont il s'agit est représenté par :

$$I_n - \frac{S_{a+1}-S_{a+n+1}}{T_a}.$$

La prime annuelle s'obtiendra en divisant cette expression par l'annuité temporaire payable au commencement de l'année.

Supposons, par exemple, qu'une personne âgée de 35 ans soit débitrice de 20 annuités de 100 francs, et qu'il s'agisse de garantir au prêteur le payement des annuités restant dues au décès; on aura :

$$\left(I_{20} - \frac{S_{36}-S_{56}}{T_{35}}\right) 100.$$

On trouve dans une table d'intérêts composés que 20 annuités de 1 fr. à 4 p. 100 valent 13 fr. 590.

Digitized by Google

L'annuité viagère temporaire est égale à :

$$\frac{1046096 - 207611}{73597} = \frac{838485}{73597} = 11^{f}\ 390.$$

On a donc :

$$(13{,}590 - 11{,}390)\ 100 = 220 \text{ fr.}$$

Pour obtenir la prime annuelle, payable pendant vingt ans, il faudra diviser cette quantité par :

$$\frac{S_{35} - S_{55}}{T_{35}}, \text{ soit } \frac{1119693 - 228993}{73597} = \frac{890700}{73597} = 12{,}10.$$

On trouvera ainsi 18 fr. 18 c.

40. Il est une nature d'opérations qui participe de l'assurance différée et de l'assurance temporaire, et que, pour cette raison, on appelle mixte. Dans celle-ci, la somme garantie est payable si l'assuré vit à l'expiration du temps convenu ; et en cas de décès avant cette époque, elle devient exigible immédiatement.

Il est évident que le coût d'une semblable assurance est égal au prix d'une assurance temporaire augmenté du prix d'une assurance différée. La première a pour expression, comme on l'a vu au n° 37 : $P_a - P_{a+n}\,Q_n^n$, ou si l'on remplace $P_a$ et $P_{a+n}$ par leurs équivalents, $1 - i\,C_a - \left(1 - i\,C_{a+n}\right)Q_a^n$. En ajoutant à cette quantité la valeur d'une assurance différée, soit $Q_a^n$ et simplifiant, on aura pour la valeur cherchée :

$$1 - i\left(C_a - C_a^n\right) \text{ ou bien } 1 - i\,\frac{S_{a+1} - S_{a+n+1}}{T_a},$$

expression dont on peut se rendre compte en remarquant que, dans cette opération, on acquiert un capital du revenu viager duquel on est privé pendant un certain

Digitized by Google

nombre d'années, si l'on est vivant, et qui n'est plus grevé d'aucun usufruit, si l'on meurt avant ce temps.

La prime annuelle se déduit de la formule indiquée au n° 28.

Exemple : Quelle est à 30 ans la prime unique ou annuelle d'une assurance mixte de 100 francs de 20 ans de durée?

On aura pour la prime unique :

$$100\left(1-0{,}04\times\frac{S_{31}-S_{51}}{T_{30}}\right)$$

$$=100\left(1-0{,}04\times\frac{1458781-331015}{97116}\right)=53^{f}550,$$

et pour la prime annuelle :

$$\frac{53{,}550\times T_{30}}{S_{30}-S_{50}}=\frac{53{,}550\times 97116}{1555897-361064}=4^{f}\ 35.$$

41. On appelle assurance à terme fixe, une opération par laquelle une certaine somme doit être payée dans un nombre convenu d'années à l'assuré ou à ses héritiers, et dont la prime n'est payable (ordinairement pendant ce même nombre d'années) qu'autant que l'assuré est vivant.

Le payement de la somme assurée n'étant subordonné à aucune éventualité, si cette somme est 1 franc, sa valeur actuelle est $(1+i)^{-n}$; et, quant à la prime annuelle, on l'obtiendra en divisant cette quantité par une annuité viagère temporaire; elle sera donc égale à :

$$\frac{(1+i)^{-n}\times T_{a}}{S_{a}-S_{a+n}}.$$

*Exemple :* Quelle est, à 30 ans, la prime unique ou annuelle d'une assurance de 100 francs payable au bout de 20 ans, sans éventualité?



Digitized by Google

La prime unique, d'après la table d'intérêts composés à 4 p. 100, est égale à 45 fr. 638.

La prime annuelle payable du vivant seulement de la tête de 30 ans s'obtiendra en substituant dans l'exemple précédent ce dernier chiffre à celui de 53,550, et l'on aura ainsi 3 fr. 718.

42. On appelle contre-assurance une opération par laquelle on garantit le remboursement sans intérêts des sommes versées dans une association tontinière, en cas de décès de la tête sur laquelle les fonds ont été placés.

S'il s'agit de versements déjà effectués, la contre-assurance n'est qu'une assurance temporaire dont le prix se détermine, conformément au n° 37, mais s'il s'agit d'annuités à verser, l'opération est plus compliquée.

Cherchons quel est le prix de la contre-assurance d'une annuité de 1 franc qui doit être versée, pendant $n$ années, sur une tête de l'âge $a$, et dont le premier payement se fait de suite.

Pour ce premier payement, le prix de l'assurance est, d'après la formule n° 37..... $P_a - P_{a+n} Q_a^n$

Le second versement devant avoir lieu à l'âge $a+1$, $P_a$ deviendra $P_{a+1}$ et $Q_a^n$ se changera en $Q_{a+1}^{n-1}$; $P_{a+n}$ ne variera pas, puisque $a+n$ est l'âge extrême de l'assurance ; l'expression devra, en outre, être multipliée par $\frac{y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-1} = Q_a^1$; mais si l'on observe que $Q_{a+1}^{n-1} \times Q_a^1 = \frac{y_{a+n}}{y_{a+1}} \times \frac{y_{a+1}}{y_a}(1+i)^{-n} = Q_a^n$ on aura :

Pour le prix de l'assurance de la 2e annuité..... $P_{a+1} \times Q_a^1 - P_{a+n} Q_a$ ;

Digitized by Google

On trouvera pour le prix de
l'assurance de la 3e annuité $P_{a+2} \times Q_a^2 - P_{a+n}\, Q_a^n$ ;
Et ainsi de suite jusqu'à la $n^e$,
dont l'assurance coûtera... $P_{a+n-1} \times Q_a^{n-1} - P_{a+n} Q_a^n$.

Si l'on réunit ces divers termes, on trouve pour le prix total de la contre-assurance :

$$P_a + P_{a+1}\, Q_a^1 + P_{a+2}\, Q_a^2 + P_{a+3}\, Q_a^3 + \ldots + P_{a+n-1}\, Q_a^{n-1} - n\, P_{a+n}\, Q_a^n .$$

On peut transformer cette formule de manière à en rendre les calculs plus faciles.

On sait que :

$$P_a = 1 - i\, C_a = 1 - i\, \frac{S_{a+1}}{T_a},$$

de même :

$$P_{a+1} = 1 - i\, C_{a+1} = 1 - i\, \frac{S_{a+2}}{T_{a+1}},$$

et ainsi de suite.

D'un autre côté :

$$Q_a^1 = \frac{T_{a+1}}{T_a}, \qquad Q_a^2 = \frac{T_{a+2}}{T_a},$$

et ainsi de suite.

En faisant ces substitutions dans la formule, et en opérant quelques simplifications, on aura :

$$1 + \frac{T_{a+1}}{T_a} + \frac{T_{a+2}}{T_a} + \ldots\ldots\ldots + \frac{T_{a+n-1}}{T_a} - \frac{i\,(S_{a+1} + S_{a+2} + \text{etc.}, + S_{a+n})}{T_a} - n\, \frac{T_{a+n} - i\, S_{a+n+1}}{T_a}.$$

On peut simplifier encore en remplaçant la première série par son équivalent $\frac{S_a - S_{a+n}}{T_a}$, et la seconde conformément au n° 33 par $i\,(\Sigma S_{a+1} - \Sigma S_{a+n+1})$; on aura

Digitized by Google

ainsi, pour le prix cherché :

$$\frac{1}{T_a}\Big\{(S_a - S_{a+n}) - i(\Sigma S_{a+1} - \Sigma S_{a+n+1}) - n(T_{a+n} - iS_{a+n+1})\Big\}$$

*Exemple :* Quel est le prix de la contre assurance d'une annuité de 100 francs sur une tête de 30 ans pendant 10 ans?

Il s'agit de calculer la formule suivante :

$$\frac{100}{T_{30}}\Big\{(S_{30} - S_{40}) - i\,(\Sigma S_{31} - \Sigma S_{41}) - 10\,(T_{40} - i\,S_{41})\Big\}.$$

Tous les termes sont donnés par la table d'annuités, sauf le terme $\Sigma S_{31} - \Sigma S_{41}$, qu'on obtient en additionnant les dix nombres $S_{31} + S_{32} +$ etc., $+ S_{40}$, ce qui donne 10995026 (en retranchant les 2 dernières décimales) ; il reste donc à effectuer les calculs ci-après :

$$\frac{100}{97116}\Big\{\begin{matrix}(1555897 - 790135) - 0{,}04 \times 10995026 \\ - 10\,(55309 - 0{,}04 \times 734825)\end{matrix}\Big\}.$$

On trouvera ainsi pour le prix cherché 68 francs 78 centimes.

La prime annuelle se calculera comme dans les exemples précédents, et si elle n'est payable que pendant 5 ans, elle sera égale à :

$$\frac{68{,}78 \times 97116}{1555897 - 1119693} = 15{,}32.$$

43. Quelques compagnies promettent aux assurés qui contractent pour la vie entière de leur payer, pendant toute leur vie, l'intérêt des primes.

Quel doit être, dans cette hypothèse, le montant de la prime que nous désignons par $x$?

Digitized by Google

L'assureur doit demander, outre le prix $P_a$ de l'assurance, la valeur actuelle des intérêts qu'il aura à servir. Supposons que l'intérêt qu'il bonifie soit égal à $i$, l'intérêt viager de la première prime sera égal à $i \times C_a$ ou $i \times \frac{S_{a+1}}{T_a}$; l'intérêt viager de la 2e prime sera exprimé par une rente différée de un an, soit $i \times \frac{S_{a+2}}{T_a}$; de même, pour l'intérêt viager de la 3e prime, on aura $i \times \frac{S_{a+3}}{T_a}$ et ainsi de suite. Si l'on réunit ces diverses quantités, et si l'on se sert de la même annotation qu'au n° 33, on aura pour la valeur des intérêts à servir $i \times \Sigma \frac{S_{a+1}}{T_a}$; d'un autre côté le prix de l'assurance est égal à $1 - i \frac{S_{a+1}}{T_a}$; on aura donc pour résoudre la question l'équation suivante :

$$x\left(1 + \frac{S_{a+1}}{T_a}\right) = 1 - \frac{iS_{a+1}}{T_a} + i \times \Sigma \frac{S_{a+1}}{T_a},$$

ou :

$$x\,(T_a + S_{a+1}) = T_a - iS_{a+1} + i \times \Sigma\, S_{a+1},$$

d'où l'on déduit, en se rappelant que $T_a + S_{a+1} = S_a$.

$$x\,(S_a - i\Sigma\, S_{a+1}) = T_a - iS_{a+1},$$

et enfin :

$$x = \frac{T_a - iS_{a+1}}{S_a - i\,\Sigma\, S_{a+1}}.$$

Si l'on veut avoir la valeur de $x$ en fonction de $p_a$, il suffit d'observer que $p_a$ peut être mis sous la forme :

$$p_a = \frac{T_a - iS_{a+1}}{S_a}, \text{ d'où } \frac{x}{p_a} = \frac{S_a}{S_a - i\Sigma S_{a+1}}$$

et

$$x = \frac{S_a \times p_a}{S_a - i\Sigma S_{a+1}}.$$

Digitized by Google

Cherchons quelle sera, dans cette hypothèse, à 40 ans, la prime d'une assurance de 100 francs ; elle aura pour expression :

$$100 \times \frac{T_{40} - 0{,}04\, S_{41}}{S_{40} - 0{,}04\, \Sigma\, S_{41}}$$

On a pour la somme, des nombres depuis l'âge de 41 ans jusqu'à la fin de la table, en retranchant les deux dernières décimales 8473790 ; il faudra donc effectuer le calcul suivant :

$$\frac{55310 - 0{,}04 \times 734825}{790135 - 0{,}04 \times 8473790} \times 100 = 5^{f}\,74,$$

au lieu de 3 fr. 28 c., prime ordinaire.

En se servant de la 2e formule, on aura :

$$\frac{3{,}28 \times 790135}{790135 - 0{,}04 \times 8473790} \times 100 = 5^{f}\,74,$$

comme ci-dessus.

44. On a souvent besoin de connaître quelle est, au bout d'un certain nombre d'années pendant lequel le contrat a couru, la valeur d'une assurance contractée pour la vie entière.

Soit $a$ l'âge auquel on contracte et $n$ le nombre d'années écoulées, $P_{a+n}$ représentera la valeur de l'assurance, si elle a été contractée à prime unique ; mais, si elle a été souscrite à primes annuelles, il faut en déduire la valeur des primes à payer qui, lorsque l'évaluation se fait à l'expiration de la $n^{e}$ année, sont équivalentes à $p_a\,(1 + C_{a+n})$.

Ainsi on aura pour la valeur actuelle du contrat :

$$P_{a+n} - p_a\,(1 + C_{a+n})\,;$$

Digitized by Google

et si l'on remarque que d'après le n° 36 :

$$1 + C_{a+n} = \frac{P_{a+n}}{p_{a+n}},$$

la formule devient :

$$P_{a+n}\left(1 - \frac{p_a}{p_{a+n}}\right). \quad (1).$$

Quelle est, par exemple, au bout de 10 années, la valeur d'une assurance de 100 francs contractée à l'âge de 30 ans? On aura à calculer :

$$P_{40}\left(1 - \frac{p_{30}}{p_{40}}\right).$$

Ces nombres sont donnés par les tables d'assurances ou d'annuités, et il n'y a plus qu'à chiffrer :

$$\left(1 - \frac{2,49}{3,28}\right) \times 46,86 = 11^f 27.$$

---

(1) Ces formules servent aux compagnies d'assurances à déterminer les sommes qu'elles doivent mettre en réserve, comme représentant la valeur de leurs contrats en cours.

Elles peuvent encore servir à calculer la somme à restituer aux assurés, lorsqu'après un certain nombre d'années, ils demandent à racheter le contrat.

En envisageant la question sous ce second rapport, on peut observer que l'assuré, qui cesse le payement de ses primes, a versé, en trop, la différence entre la prime d'assurance sur la vie entière et une prime d'assurance temporaire. L'excédant, considéré comme une prime d'assurance différée placée sur sa tête, donne le capital qui doit lui être restitué. C'est ce qu'il est facile de démontrer.

En effet, dans le cas d'une prime unique, la différence entre le versement fait et celui qui aurait dû être effectué, sera :

$$P_a - \left(P_a - P_{a+n}\, Q_a^n\right) = P_{a+n}\, Q_a^n,$$

et cette somme placée en différé, c'est à dire divisée par $Q_a^n$, sera égale à $P_{a+n}$, valeur du rachat dans cette hypothèse.

Si l'assurance a été contractée au moyen d'une prime annuelle, la diffé-

Digitized by Google

45. On demande encore à quelle somme, payable au décès, se réduit une assurance contractée pour toute la vie, quand on cesse de payer la prime après $n$ années.

Pour résoudre cette question, il suffit de retrancher de la somme de 1 franc, assurée primitivement, celle qui, à l'âge $a + n$, correspond à la prime qu'on cesse de payer. La prime, à ce dernier âge, étant exprimée par $p_{a+n}$, la prime $p_a$ correspond à une somme payable au décès qui se déduit de cette proportion :

$$p_{a+n} : 1 :: p_a ; x, \text{ d'où } x = \frac{p_a}{p_{a+n}}.$$

Donc $1 - \frac{p_a}{p_{a+n}}$ représente la somme à laquelle se réduit l'assurance.

Ainsi, par exemple, à combien se réduit une assu-

---

rance entre cette prime $p_a$ et la prime temporaire sera de :

$$p_a - \frac{\left(P_a - P_{a+n}\, Q_a^n\right) T_a}{S_a - S_{a+n}}$$

et, pour trouver ce que produira cette quantité, considérée comme la prime annuelle d'une assurance différée, il faudra la diviser par $\frac{T_{a+n}}{S_a - S_{a+n}}$

On trouvera ainsi, en simplifiant l'expression :

$$\frac{p_a\,(S_a - S_{a+n}) - P_a\, T_a}{T_{a+n}} + P_{a+n}$$

et si l'on observe que $p_a\, S_a = P_a\, T_a$, il restera :

$$P_{a+n} - \frac{p_a\, S_{a+n}}{T_{a+n}},$$

expression équivalente à $P_{a+n} - (1 + C_{a+n})\, p_a$, que nous avons obtenu plus haut.

Digitized by Google

rance de 100 francs contractée à 30 ans, quand on cesse de payer la prime après 10 ans ? Il suffit de calculer :

$$\left(1 - \frac{p_{30}}{p_{10}}\right) 100 = \left(1 - \frac{2.49}{3.28}\right) 100 = 24'09.$$

Si l'on veut connaître quelle est la valeur actuelle de l'assurance ainsi réduite, il suffit de multiplier l'expression ci-dessus par $P_{a+n}$ et l'on aura $P_{a+n}\left(1 - \frac{p_a}{p_{a+n}}\right)$, comme dans la formule du numéro précédent.

Digitized by Google

## DES RENTES SUR DEUX TÊTES.

**46.** Cherchons d'abord quelle est la valeur d'une rente viagère sur deux têtes réunies, c'est-à-dire payable aussi longtemps que les deux têtes existeront simultanément, et désignons pour plus de clarté, par $A$, une personne de l'âge de $a$, et par $B$ une tête moins jeune âgée de $b$ années.

La valeur actuelle d'une somme exigible dans $n$ années, si $A$ et $B$ sont vivants l'un et l'autre à cette époque, est égale, d'après les n$^{os}$ 3 et 12, à

$$\frac{y_{a+n}\ y_{b+n}}{y_a\ y_b}\ (1+i)^{-n}.$$

Donc, si nous désignons par $C_{a\,b}$ la valeur cherchée, on aura :

$$C_{a\,b}=\frac{y_{a+1}\ y_{b+1}}{y_a\ y_b}\ (1+i)^{-1}+\frac{y_{a+2}\ y_{b+2}}{y_a\ y_b}\ (1+i)^{-2}+\ \ldots\ \text{etc.}$$

la série étant prolongée jusqu'à la limite des tables pour la tête la plus âgée des deux.

Si l'on compare cette série avec celle exprimant la valeur de $C_{a+1,\,b+1}$, on trouvera, d'après une analyse analogue à celle du n° 17, la relation suivante :

$$C_{a\,b}=\left(C_{a+1,\,b+1}+1\right)\frac{y_{a+1}\ y_{b+1}}{y_a\ y_b}\ (1+i)^{-1}.$$

On peut, à l'aide de cette formule, calculer une table d'annuités sur 2 têtes commençant par l'âge extrême de la table $\omega$, pour la tête la plus âgée, soit $B$, et par l'âge $\omega-(b-a)$ pour la tête la plus jeune. Cette table comprendra tous les âges ayant entre eux la différence $b-a$,

Digitized by Google

mais il faudra former autant de tables qu'on donnera à $b-a$ de valeurs différentes.

Si $b=a$, la formule ci-dessus deviendra :

$$C_{a,a}=\left(C_{a+1,\,a+1}+1\right)\left(\frac{y_{a+1}}{y_a}\right)^2(1+i)^{-1}.$$

Cherchons à former d'après la mortalité de Deparcieux une table d'annuités où la différence d'âge entre les 2 têtes est de 5 ans.

La table de mortalité donne le nombre des vivants comme suit :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| à 95 ans, 0 | | | | |
| à 94 ans, 1 | à 93 ans, 2 | à 92 ans, 4 | à 91 ans, 7 | à 90 ans, 11 |
| à 89 ans, 16 | à 88 ans, 22 | à 87 ans, 29 | à 86 ans, 38 | à 85 ans, 48 |

D'où l'on déduit :

$$C_{89,\,94}=0\,;$$

$$C_{88,\,93}=\frac{y_{89}\,y_{94}}{y_{88}\,y_{93}}\times(1{,}04)^{-1}=\frac{16}{22}\times\frac{1}{2}\times(1{,}04)^{-1}=0{,}3496;$$

$$C_{87,\,92}=\frac{y_{88}\,y_{93}}{y_{87}\,y_{92}}\times(1{,}04)^{-1}\,(1+C_{88,\,93})$$

$$=\frac{22}{29}\times\frac{2}{4}\times(1{,}04)^{-1}\times 1{,}3496=0{,}4922\,;$$

$$C_{86,\,91}=\frac{y_{87}\,y_{92}}{y_{86}\,y_{91}}\times(1{,}04)^{-1}\,(1+C_{87,\,92})$$

$$=\frac{29}{38}\times\frac{4}{7}\times(1{,}04)^{-1}\times 1{,}4922=0{,}6257\,;$$

$$C_{85,\,90}=\frac{y_{86}\,y_{91}}{y_{85}\,y_{90}}\times(1{,}04)^{-1}\,(1+C_{86,\,91})$$

$$=\frac{38}{48}\times\frac{7}{11}\times(1{,}04)^{-1}\times 1{,}6257=0{,}7875.$$

et ainsi de suite.

**47.** On pourrait, en opérant comme au n° 19, mettre

Digitized by Google

l'expression de la rente sous la forme :

$$C_{a\,b} \times y_a\, y_b\, (1+i)^{\omega-b} = y_{a+1}\, y_{b+1}\, (1+i)^{\omega-b-1} + \\ + y_{a+2}\, y_{b+2}\, (1+i)^{\omega-b-2} + \ldots\ldots, \text{etc.}$$

et en désignant $y_a\, y_b\, (1+i)^{\omega-b}$ par $T_{a\,b}$ et la somme des termes $T_{a\,b}$, $T_{a+1,\,b+1}$, etc., par $S_{a\,b}$, on aurait :

$$C_{a\,b} = \frac{S_{a+1,\,b+1}}{T_{a\,b}}.$$

Cette formule est analytiquement plus simple ; mais ses applications exigent d'assez longs calculs. Pour ne pas compliquer par de doubles solutions la discussion des questions sur 2 têtes, on s'en tiendra dans ce qui va suivre aux formules qui se déduisent des n^os^ 17 et 46.

48. Quand on connaît le prix d'une rente viagère sur 2 têtes, il est facile de déterminer la valeur d'une rente de survie. Supposons qu'il s'agisse d'une rente de 1 fr. au profit de *A* s'il survit à *B*. C'est comme si *A* jouissait d'une rente qu'il rendrait tant que *B* serait vivant en même temps que lui ; car dès que *B* meurt, *A* entre en jouissance de la rente, et si *A* meurt le premier l'opération s'annule. Donc une telle rente a pour expression

$$C_a - C_{a\,b}.$$

Si la tête *B*, au contraire, doit bénéficier de la rente après le décès de *A*, la rente de survie a pour valeur

$$C_b - C_{a\,b}.$$

Enfin, si la rente doit être servie au survivant quelconque de *A* ou de *B*, la rente de survie sera la somme des deux expressions ci-dessus, soit $C_a + C_b - 2C_{ab}$.

On peut supposer, en effet, que dans ce cas *B* et *A* jouissent chacun d'une rente de 1 franc, et qu'ils sont tenus de la rendre tant qu'ils existent ensemble.

Digitized by Google

Si les 2 têtes sont du même âge, l'expression ci-dessus se réduit à :

$$2\,(C_a - C_{a,a}).$$

Prenons pour exemple 2 têtes, l'une de 40 ans et l'autre de 50 ans et, cherchons, d'après la table de Duvillard, quel est le prix d'une rente de survie de 1 franc, au profit de l'une ou de l'autre; on trouve pour éléments du calcul :

$C_{40} = 13{,}2856$;

$C_{50} = 11{,}0159$, $\quad C_{40,\,50} = 8{,}8808$;

On aura :

1° Pour la rente de survie au profit de la tête de 40 ans,

$$C_{40} - C_{40,\,50} = 13{,}2856 - 8{,}8808 = 4{,}4048;$$

2° Pour la rente de survie au profit de la tête de 50 ans,

$$C_{50} - C_{40,\,50} = 11{,}0159 - 8{,}8808 = 2{,}1351;$$

3° Pour la rente au premier décès :

$$C_{40} + C_{50} - 2C_{40,\,50} = 13{,}2856 + 11{,}0159 - 2 \times 8{,}8808 = 6{,}5399.$$

49. Les rentes de survie s'acquièrent ordinairement au moyen d'une annuité ou prime viagère. Dans ce cas, l'annuité est payable jusqu'au premier décès, car dès que l'une des têtes s'éteint, la rente devient exigible, ou l'opération s'annule. Comme la prime est payable

Digitized by Google

d'avance, il faut, pour la déterminer, diviser le prix de la rente de survie par $1+C_{a\,b}$.

En reprenant les exemples précédents on aura :

1° Pour la prime de la rente de survie au profit de la tête de 40 ans :

$$\frac{C_{40}-C_{40,\,50}}{1+C_{40,\,50}}=\frac{4,4048}{9,8808}=0,446;$$

2° Pour la prime de la rente de survie au profit de la tête de 50 ans :

$$\frac{C_{50}-C_{40,\,50}}{1+C_{40,\,50}}=\frac{2,1351}{9,8808}=0,216;$$

3° Pour la prime de la rente de survie au premier décès :

$$\frac{C_{40}+C_{50}-2C_{40,\,50}}{1+C_{40,\,50}}=\frac{6,5399}{9,8808}=0,662.$$

50. Désignons par $V_{a\,b}$, une rente viagère sur 2 têtes, reversible en totalité au profit du survivant, et cherchons quelle est la valeur d'une telle rente.

Chaque annuité sera payable si les 2 têtes existent ensemble, ou si l'une d'elles seulement est vivante à l'expiration de l'année.

En se reportant au n° 12, on trouvera que cette probabilité pour un intervalle de $n$ années est égale à :

$$\frac{y_{a+n}}{y_a}+\frac{y_{b+n}}{y_b}-\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}}{y_a\,y_b},$$

quantité qui devra être multipliée par $(1+i)^{-n}$, pour avoir la valeur actuelle de l'annuité à payer dans $n$ années.

Digitized by Google

Par conséquent, on aura :

$$V_{a\,b} = \left(\frac{y_{a+1}}{y_a} + \frac{y_{b+1}}{y_b} - \frac{y_{a+1}\,y_{b+1}}{y_a\,y_b}\right)(1+i)^{-1}$$
$$+ \left(\frac{y_{a+2}}{y_a} + \frac{y_{b+2}}{y_b} - \frac{y_{a+2}\,y_{b+2}}{y_a\,y_b}\right)(1+i)^{-2}$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ \left(\frac{y_{a+n}}{y_a} + \frac{y_{b+n}}{y_b} - \frac{y_{a+n}\,y_{b+n}}{y_a\,y_b}\right)(1+i)^{-n}$$

et ainsi de suite jusqu'aux dernières limites de l'existence.

Si l'on totalise les termes ci-dessus perpendiculairement, on verra que la somme de la première colonne est égale à $C_a$; que la somme des termes de la seconde est équivalente à $C_b$; et enfin que la somme de la dernière colonne est exprimée par $C_{a\,b}$.

On aura donc :

$$V_{a\,b} = C_a + C_b - C_{a\,b}\,.$$

On aurait pu déduire cette expression du n° 48, en considérant qu'une rente sur 2 têtes $A$ et $B$, avec survivance, est égale à une rente sur la tête $A$, plus une rente de survie au profit de $B$; la première aura pour expression $C_a$, et la seconde $C_b - C_{ab}$; la somme sera donc :

$$C_a + C_b - C_{a\,b}\,.$$

On arriverait au même résultat en supposant la rente constituée sur la tête $B$ et reversible sur la tête $A$.

Quel est, par exemple, le prix d'une rente de 1 franc sur 2 têtes de 50 et 60 ans, reversible en totalité au profit du survivant?

En se servant des tables de Deparcieux, on trouve :

$$C_{50} = 12{,}5256, \quad C_{60} = 9{,}7130, \quad C_{50,\,60} = 8{,}0596;$$

Digitized by Google

Par conséquent :

$$V_{50,\,60} = 12{,}5256 + 9{,}7130 - 8{,}0596 = 14{,}1790.$$

51. Quelquefois, la rente n'est reversible que pour une portion sur l'une des 2 têtes, ou bien elle est réductible au premier décès indistinctement.

Désignons par $\frac{m}{n}$ la fraction pour laquelle la rente est reversible.

Si la tête $A$ doit jouir intégralement de la rente, et si elle n'est réductible qu'au cas de survivance de $B$, son expression est, d'après le n° 48,

$$C_a + \frac{m}{n}(C_b - C_{a\,b}),$$

On peut mettre cette expression sous la forme :

$$\frac{m}{n}(C_a + C_b - C_{a\,b}) + \frac{n-m}{n} C_a = \frac{m}{n} V_{a\,b} + \frac{n-m}{n} C_a .$$

Si la rente est réductible au premier décès, son expression est :

$$C_{a\,b} + \frac{m}{n}(C_a + C_b - 2\,C_{a\,b}),$$

On peut la mettre sous cette forme :

$$\frac{m}{n}(C_a + C_b - C_{a\,b}) + \frac{n-m}{n} C_{a\,b} = \frac{m}{n} V_{a\,b} + \frac{n-m}{n} C_{a\,b}.$$

Déterminons, d'après ces formules, quelle est la valeur d'une rente sur 2 têtes de 50 et 60 ans, reversible pour les 2/3 au profit de la tête de 50 ans; nous aurons, en reprenant les nombres du numéro précédent :

$$\frac{2}{3} V_{50,60} + \frac{1}{3} C_{60} = \frac{2}{3} \times 14{,}1790 + \frac{1}{3} \times 9{,}7130 = 12{,}690.$$

Digitized by Google

Si la rente est réductible d'un tiers au premier décès, quel que soit le survivant, on aura :

$$\frac{2}{3} V_{50,60} + \frac{1}{3} C_{50,60} = \frac{2}{3} \times 14,1790 + \frac{1}{3} \times 8,0596$$
$$= 12,1392. \text{ (1)}$$

**52.** Lorsque la rente sur 2 têtes réunies, ou avec réversion, est payable par semestre, trimestre ou autre fraction d'année, on verra, en raisonnant comme au n° 21, qu'il faut ajouter approximativement au prix de l'annuité la même quantité que pour la rente sur une tête. Ainsi, on aura :

$C_{ab} + \frac{1}{4}$, $V_{ab} + \frac{1}{4}$ pour la rente semestrielle;

$C_{ab} + \frac{3}{8}$, $V_{ab} + \frac{3}{8}$ pour la rente trimestrielle;

et généralement pour la rente payable en $n$ fractions :

$$C_{ab} + \frac{n-1}{2n}; \quad V_{ab} + \frac{n-1}{2n},$$

Si le décompte des arrérages est dû jusqu'au décès, on aura pareillement :

$$C_{ab}\left(1 - \frac{i}{2n}\right) + \frac{1}{2}; \quad V_{ab}\left(1 - \frac{i}{2n}\right) + \frac{1}{2}.$$

---

(1) Dans la pratique, on peut faire ce dernier calcul fort simplement, en remarquant que cela revient à constituer un tiers de la rente sur chaque tête isolément, et le dernier tiers sur les deux têtes, avec reversion, savoir $\frac{1}{3}(14,179 + 12,526 + 9,713) = 12,139$.



Digitized by Google

## DES CAPITAUX DIFFÉRÉS

### ET DES ANNUITÉS DIFFÉRÉES OU TEMPORAIRES SUR DEUX TÊTES.

---

53. On a vu, au n° 46, qu'une somme de 1 franc, payable si 2 personnes *A* et *B* sont vivantes l'une et l'autre dans $n$ années, a pour valeur actuelle $\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}}{y_a\,y_b}(1+i)^{-n}$, que nous désignerons, pour plus de simplicité, par $Q^n_{a\,b}$.

Si l'on rapproche cette quantité des valeurs de $Q^n_a$ et $Q^n_b$, on trouve cette relation qui peut simplifier quelques calculs.

$$Q^n_{a\,b} = Q^n_a \times Q^n_b\,(1+i)^n .$$

54. On sait que la valeur d'une somme payable dans $n$ années, si de 2 têtes *A* et *B* l'une est vivante alors, ou si elles sont vivantes toutes les deux, a pour expression :

$$\left(\frac{y_{a+n}}{y_a}+\frac{y_{b+n}}{y_b}-\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}}{y_a\,y_b}\right)(1+i)^{-n}=Q^n_a+Q^n_b-Q^n_{a\,b},$$

formule que nous désignerons plus loin par $K^n_{a\,b}$.

Enfin, si l'on veut déterminer la valeur d'une somme payable dans $n$ années à une personne *A*, si elle est vivante alors, et à condition qu'une autre personne *B* aura cessé de vivre, on aura, d'après le n° 12 :

$$\left(\frac{y_{a+n}}{y_a}-\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}}{y_a\,y_b}\right)(1+i)^{-n}=Q^n_a-Q^n_{a\,b}.$$

Digitized by Google

C'est la valeur d'une somme qui serait payable dans $n$ années à une tête $A$ alors vivante, mais qu'on retiendrait si les 2 têtes existaient simultanément.

55. Cherchons quelle est, d'après Deparcieux, dont nous ferons usage dans les exemples de ce chapitre, la valeur d'une somme de 1 franc à payer dans 10 années :

1° Si 2 personnes âgées l'une de 20 ans et l'autre de 30 ans existent simultanément; il s'agit de calculer $Q^{10}_{20,30}$,

$$Q^{10}_{20,30} = Q^{10}_{20} \times Q^{10}_{30} \times (1,04)^{10},$$

$$Q^{10}_{20} = \frac{T_{30}}{T_{20}} = \frac{9032,95}{14828,31} = 0,6092,$$

$$Q^{10}_{30} = \frac{T_{40}}{T_{30}} = \frac{5462,18}{9032,95} = 0,6047,$$

donc :

$$Q^{10}_{20,30} = 0,6092 \times 0,6047 \times (1,04)^{10} = 0,5453.$$

2e *cas*. Si les 2 têtes sont vivantes ou si l'une d'elles seulement existe, la formule à calculer est :

$$Q^{10}_{20} + Q^{10}_{30} - Q^{10}_{20,30} = 0,6092 + 0,6047 - 0,5453 = 0,6686.$$

3e *cas*. Si l'une des têtes désignée existe, et si elle survit à l'autre, l'expression se réduit à :

$$Q^{10}_{20} - Q^{10}_{20,30}, \text{ ou bien } Q^{10}_{30} - Q^{10}_{20,30},$$

suivant que le capital est payable à l'une ou à l'autre des deux têtes.

$$Q^{10}_{20} - Q^{10}_{20,30} = 0,6092 - 0,5453 = 0,0639;$$
$$Q^{10}_{30} - Q^{10}_{20,30} = 0,6047 - 0,5453 = 0,0594.$$

Digitized by Google

56. Les rentes différées sur 2 têtes se résolvent par des formules analogues.

Une rente différée de $n$ années sur 2 têtes réunies $A$ et $B$, a pour expression :

$$\frac{y_{a+n}\, y_{b+n}}{y_a\, y_b}(1+i)^{-n}\, C_{a+n,\, b+n}$$

qu'on peut, par analogie avec les formules sur une tête, représenter par $C^n_{a\,b}$.

Une rente en réversion, payable dans $n$ années, si l'une ou l'autre des têtes $A$ et $B$ est vivante, ou si elles existent toutes deux, est formulée par :

$$C^n_a + C^n_b - C^n_{a\,b} = V^n_{a\,b}\,.$$

Enfin, une rente payable dans $n$ années, si la tête $A$ survit à la tête $B$, a pour valeur $C^n_a - C^n_{a\,b}$.

*Exemples :* Déterminons quel sera le prix d'une rente de 1 franc, payable dans 10 ans, les 2 têtes étant âgées de 40 et 50 ans :

1° Si les 2 têtes doivent exister simultanément, et que la rente s'éteigne au premier décès, il s'agit de calculer :

$$C^{10}_{40,\,50} = C_{50,\,60} \times \frac{y_{50}\, y_{60}}{y_{40}\, y_{50}} \times (1{,}04)^{-10}$$

$$= \frac{581 \times 463}{657 \times 581}(1{,}04)^{-10} \times 8{,}0596 = 0{,}4761 \times 8{,}0596 = 3{,}838.$$

2° Si la rente est en réversion, et payable si les 2 têtes sont vivantes, ou l'une d'elles seulement, son expression sera :

$$C^{10}_{40} + C^{10}_{50} - C^{10}_{40,\,50}\,;$$

Digitized by Google

$$C_{40}^{10} = \frac{S_{51}}{T_{40}} = \frac{40873}{5462} = 7{,}483;$$

$$C_{50}^{10} = \frac{S_{61}}{T_{50}} = \frac{17063}{3263} = 5{,}230;$$

$$C_{40,50}^{10} = \ldots\ldots\ldots\ 3{,}838;$$

donc :

$$V_{40,50}^{10} = 7{,}483 + 5{,}230 - 3{,}838 = 8{,}875.$$

3° Si la rente est payable à la tête de 40 ans, dans le cas où elle survivrait à la tête de 50 ans, sa valeur sera :

$$C_{40}^{10} - C_{40,50}^{10} = 7{,}483 - 3{,}838 = 3{,}645.$$

57. La rente différée avec réversion peut être subordonnée à la condition d'existence des 2 têtes désignées, au bout du délai fixé; dans cette hypothèse, il faut considérer que la rente, au bout du délai $n$, sera exprimée par $C_{a+n} + C_{b+n} - C_{a+n,\,b+n}$, expression qu'on doit ramener à sa valeur actuelle, en la multipliant par la probabilité que les 2 têtes existeront ensemble, après $n$ années, c'est-à-dire par $\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}}{y_a\,y_b}\,(1+i)^{-n}$, et l'on aura :

$$\left(C_{a+n} + C_{b+n} - C_{a+n,\,b+n}\right)\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}}{y_a\,y_b}\,(1+i)^{-n}.$$

ou bien :

$$C_a^n \times \frac{y_{b+n}}{y_b} + C_b^n \times \frac{y_{a+n}}{y_a} - C_{a,b}^n.$$

On trouvera de même que, dans ce cas, la rente de survie a pour valeur :

$$C_a^n \times \frac{y_{b+n}}{y_b} - C_{a\,b}^n.$$

Digitized by Google

Reprenant les exemples du n° précédent, on demande quel sera le prix d'une rente de 1 franc payable dans 10 ans, sur 2 têtes de 40 et de 50 ans, avec réversion, mais sous la condition qu'elles existeront toutes deux au bout de 10 années; il faudra calculer :

$$C_{40}^{10} \times \frac{y_{60}}{y_{50}} + C_{50}^{10} \times \frac{y_{50}}{y_{40}} - C_{40,\,50}^{10};$$

soit :

$$7{,}483 \times \frac{463}{581} + 5{,}230 \times \frac{581}{657} - 3{,}838 = 6{,}751.$$

Une pareille rente, payable dans 10 ans à une tête de 40 ans, au cas de prédécès d'une tête de 50 ans, et pourvu que cette condition ne s'accomplisse qu'après les 10 ans, sera représentée par :

$$C_{40}^{10} \times \frac{y_{60}}{y_{50}} - C_{40,\,50}^{10} = 7{,}483 \times \frac{463}{581} - 3{,}838 = 2{,}125.$$

58. L'annuité temporaire est, comme on sait, la différence entre l'annuité viagère et l'annuité différée.

L'annuité temporaire sur 2 têtes réunies a donc pour expression :

$$C_{a\,b} - C_{a\,b}^{n}.$$

La rente temporaire sur 2 têtes, avec réversion, est représentée par $V_{a\,b} - V_{a\,b}^{n}$.

Si la rente temporaire est payable d'avance, on trouvera, par analogie avec ce qui a été dit au n° 28 :

Pour la rente temporaire sur 2 têtes réunies :

$$1 + C_{a\,b} - \left(1 + C_{a+n,\,b+n}\right) \frac{y_{a+n}\, y_{b+n}}{y_a\, y_b} (1+i)^{-n}$$
$$= 1 - Q_{a\,b}^{n} + C_{a\,b} - C_{a\,b}^{n}.$$

Digitized by Google

Pour la rente temporaire sur 2 têtes, avec réversion :

$$1+V_{a\,b}-\left\{(1+C_{a+n})\,Q^n_a+(1+C_{b+n})\,Q^n_b-(1+C_{a+n,\,b+n})\,Q^n_{a\,b}\right\}$$
$$=1-K^n_{a\,b}+V_{a\,b}-V^n_{a\,b}\,.$$

59. On peut facilement, d'après ce qui précède, déterminer quelle serait la prime annuelle à payer pour obtenir un capital ou une rente différée sur 2 têtes réunies ou avec réversion.

S'il s'agit d'un capital ou d'une rente sur 2 têtes réunies, la prime doit être payable dans les mêmes conditions, et elle sera égale à :

$$\frac{Q^n_{a\,b}\ \text{ou bien}\ C^n_{a\,b}}{1-Q^n_{a\,b}+C_{a\,b}-C^n_{a\,b}}\,.$$

S'il s'agit d'un capital ou d'une rente sur les 2 têtes avec réversion, la prime peut être payable, soit pendant l'existence simultanée seulement, soit pendant l'existence de l'une ou de l'autre tête dans l'intervalle des $n$ années; dans le premier cas, sa valeur sera :

$$\frac{K^n_{a\,b}\ \text{ou bien}\ V^n_{a\,b}}{1-Q^n_{a\,b}+C_{a\,b}-C^n_{a\,b}}$$

Et, dans le deuxième cas :

$$\frac{K^n_{a\,b}\ \text{ou bien}\ V^n_{a\,b}}{1-K^n_{a\,b}+V_{a\,b}-V^n_{a\,b}}$$

Reprenons un des exemples du n° 56, et cherchons quelle sera, pour une rente en réversion, la prime annuelle payable d'avance pendant 10 ans :

1° Si les 2 têtes vivent simultanément;

Digitized by Google

2° Si elles existent toutes deux ou l'une d'elles seulement.

Dans le premier cas, il s'agit de calculer :

$$\frac{V^{10}_{40,50}}{1 - Q^{10}_{40,50} + C_{40,50} - C^{10}_{40,50}}$$

$V^{10}_{40,50} = 8{,}875$, $\quad Q^{10}_{40,50} = 0{,}4761$,

$C_{40,50} = 10{,}734$, $\quad C^{10}_{40,50} = 3{,}838$.

Donc, on aura pour le nombre cherché :

$$\frac{8{,}875}{1 - 0{,}4761 + 10{,}734 - 3{,}838} = 1{,}196.$$

Dans le deuxième cas, il faut calculer :

$$\frac{V^{10}_{40,50}}{1 - K^{10}_{40,50} + V_{40,50} - V^{10}_{40,50}}$$

$$K^{10}_{40,50} = Q^{10}_{40} + Q^{10}_{50} - Q^{10}_{40,50}$$

$$= 0{,}5974 + 0{,}5383 - 0{,}4761 = 0{,}6596 ;$$

$$V_{40,50} = C_{40} + C_{50} - C_{40,50}$$

$$= 15{,}1326 + 12{,}5256 - 10{,}7346 = 16{,}9236.$$

Par conséquent, le nombre cherché est égal à :

$$\frac{8{,}875}{1 - 0{,}6596 + 16{,}9236 - 8{,}875} = \frac{8{,}875}{8{,}389} = 1{,}058.$$

60. On peut encore résoudre quelques questions d'un intérêt pratique en combinant l'annuité temporaire sur 2 têtes avec les formules sur une tête.

En effet, il peut arriver que le capital ou la rente différée soit constituée sur une seule tête, tandis que le

Digitized by Google

payement de la prime annuelle, qui en forme le prix, sera subordonné à l'existence de 2 têtes. Cela aura lieu toutes les fois que, pour avantager une tierce personne, le contractant stipulera que la prime sera payable sur sa propre tête, et qu'elle cessera d'être due au cas de décès, le capital ou la rente restant exigible. La prime annuelle d'un tel capital ou d'une telle rente sera représentée par :

$$\frac{Q_a^n \text{ ou } C_a^n}{1 - Q_{a\,b}^n + C_{a\,b} - C_{a\,b}^n}.$$

*Exemple :* Un père, âgé de 30 ans, veut constituer une assurance de 100 francs au profit de son fils âgé de 5 ans, payable si celui-ci existe au bout de 15 ans; on demande quelle sera la prime annuelle exigible seulement du vivant du père et du fils; il faut calculer :

$$\frac{Q_5^{15}}{1 - Q_{5,30}^{15} + C_{5,30} - C_{5,30}^{15}} \times 100$$

$$Q_5^{15} = \frac{T_{20}}{T_5} = \frac{14828}{31101} = 0{,}4768;$$

$$Q_{5,30}^{15} = \frac{T_{20}}{T_5} \times \frac{T_{45}}{T_{30}} (1{,}04)^{15} = \frac{14828}{31101} \times \frac{4250}{9033} (1{,}04)^{15} = 0{,}4041;$$

$$C_{5,30} = 14{,}415; \quad C_{20,45} = 12{,}332;$$

$$C_{5,30}^{15} = C_{20,45} \times Q_{5,30}^{15} = 12{,}332 \times 0{,}4041 = 4{,}983;$$

On aura donc :

$$\frac{0{,}4768}{1 - 0{,}4041 + 14{,}415 - 4{,}983} \times 100$$

$$= \frac{0{,}4768}{10{,}028} \times 100 = 4{,}754.$$

Digitized by Google

## DES ASSURANCES AU CAS DE DÉCÈS

### SUR DEUX TÊTES.

61. Cherchons quel est le coût d'une somme de 1 franc payable au premier décès de l'une quelconque des têtes *A* et *B*.

En désignant le prix unique par $P_{ab}$, on trouvera, par une analyse semblable à celle du n° 35 :

$$P_{ab} = 1 - i\,C_{ab}.$$

Ce prix est donc égal au capital assuré, moins le revenu viager de ce capital, pendant l'existence simultanée des têtes *A* et *B*.

En désignant par $p_{ab}$ la prime annuelle d'une semblable assurance payable d'avance et pendant l'existence conjointe, on aura :

$$p_{ab} = \frac{1 - i\,C_{ab}}{1 + C_{ab}}.$$

Si la prime était payable jusqu'au décès du dernier vivant, elle serait égale à $\frac{1 - i\,C_{ab}}{1 + V_{ab}}$; mais cette formule est sans application, les assureurs ne pouvant pas se trouver créanciers quand le débiteur n'a plus d'intérêt à payer la prime.

Si la prime est payable pendant l'existence conjointe, mais seulement durant $n$ années, elle a pour expression :

$$\frac{1 - i\,C_{ab}}{1 - Q^n_{ab} + C_{ab} - C^n_{ab}}.$$

Digitized by Google

*Exemples* : Quel est le prix d'une assurance de 100 francs payable aussitôt le décès de l'une de 2 têtes âgées de 30 et 40 ans, d'après Duvillard, que nous prendrons pour base dans les exemples de ce chapitre et du suivant :

$$C_{30,40} = 10,7990, \text{ d'où } P_{30,40} = 1 - 0,04 \times 10,7990 = 0,56804,$$

soit pour 100 francs 56f 804.

Quelle est la prime annuelle payable pendant les existences conjointes ? Elle est égale à :

$$\frac{56,804}{11,799} = 4^f 814 .$$

Quelle est la prime annuelle payable pendant 15 ans ? Il faudra calculer :

$$\frac{56,804}{1 - Q^{15}_{30,40} + C_{30,40} - C^{15}_{30,40}}$$

$$Q^{15}_{30,40} = \frac{T_{45}}{T_{30}} \times \frac{T_{55}}{T_{40}} \times (1,04)^{15} =$$

$$= \frac{4111250}{9711571} \times \frac{2138256}{5530980} \times (1,04)^{15} =$$

$$= 0,4233 \times 0,3866 \times (1,04)^{15} = 0,2947 ;$$

$$C^{15}_{30,40} = C_{45,55} \times Q^{15}_{30,40} = 7,7663 \times 0,2947 = 2,289.$$

Donc la prime cherchée est :

$$\frac{56,804}{1 - 0,2947 + 10,799 - 2,289} = \frac{56,804}{9,215} = 6^f 164.$$

62. Quelle est la prime unique d'une assurance de 1 franc payable après le décès de *A* et de *B* ?

Ce prix est égal à celui d'une somme de 1 franc, de la jouissance de laquelle on sera privé aussi longtemps que l'une des 2 têtes existera ; son expression est donc :

$$1 - i V_{a\,b} .$$

Digitized by Google

On peut encore considérer que le prix d'une pareille assurance est égal au prix d'une assurance sur chaque tête, moins le prix d'une assurance sur les 2 têtes conjointes, soit :

$$1 - i C_a + 1 - i C_b - (1 - i C_{a\,b}) = 1 - i V_{a\,b}.$$

La prime annuelle peut être payable pendant l'existence simultanée des 2 têtes seulement, ou bien aussi longtemps que l'une d'elles existera. Dans le premier cas, elle est égale à :

$$\frac{1 - i V_{a\,b}}{1 + C_{a\,b}},$$

et dans le deuxième elle est représentée par :

$$\frac{1 - i V_{a\,b}}{1 + V_{a\,b}}.$$

Si la prime ne doit être payée que pendant $n$ années durant l'existence conjointe, le diviseur sera le même que celui du numéro précédent.

Si elle doit être payée pendant $n$ années, pourvu que l'une des têtes soit vivante, elle sera égale à :

$$\frac{1 - i V_{a\,b}}{1 - K^n_{a\,b} + V_{a\,b} - V^n_{a\,b}}.$$

*Exemples* : Quel est le prix d'une assurance de 100 francs payable après le décès de 2 personnes âgées de 30 et 40 ans.

On a :

$$V_{30,40} = C_{30} + C_{40} - C_{30,40}$$
$$= 15{,}021 + 13{,}285 - 10{,}799 = 17{,}507;$$

Donc le prix demandé est :

$$(1 - 0{,}04 \times 17{,}507)\,100 = 29^f\,97.$$

Digitized by Google

La prime annuelle payable pendant l'existence commune est :

$$\frac{29,97}{1 + 10,799} = 2^f\,54.$$

La prime annuelle jusqu'au dernier décès est :

$$\frac{29,97}{1 + 17,507} = 1^f\,62.$$

La prime payable pendant 15 ans au plus pendant l'existence commune sera :

$$\frac{29,97}{9,215} = 3^f\,25.$$

La prime payable pendant la même durée, si les 2 têtes sont vivantes, ou si l'une d'elles seulement existe, est égale à :

$$\frac{29,97}{1 - K^{15}_{30,40} + V_{30,40} - V^{15}_{30,40}};$$

$$K^{15}_{30,40} = Q^{15}_{30} + Q^{15}_{40} - Q^{15}_{30,40} = 0,423 + 0,387 - 0,295 = 0,515;$$

$$V^{15}_{30,40} = C_{45} \times Q^{15}_{30} + C_{55} \times Q^{15}_{40} - C_{45,55} \times Q^{15}_{30,40};$$

$$= 12,217 \times 0,423 + 9,709 \times 0,387 - 2,289 = 6,633.$$

D'où il résulte que la prime cherchée est égale à :

$$\frac{29,97}{1 - 0,515 + 17,507 - 6,633} = \frac{29,97}{11,359} = 2^f\,64.$$

63. Cherchons maintenant quelle est la valeur d'une assurance de 1 franc payable dans le cas où une personne *A* viendrait à mourir avant une personne *B*.

Digitized by Google

On a vu au n° 13 que la probabilité d'un tel événement entre les âges $a$ et $a + 1$ est égale à :

$$\frac{(y_a - y_{a+1})(y_b + y_{b+1})}{2y_a y_b}.$$

Cette expression est celle de la valeur de l'assurance pour la première année, en négligeant, comme on l'a fait précédemment, la quantité $(1+i)^{-\frac{1}{2}}$, par laquelle elle devrait, à la rigueur, être multipliée.

Nous la reproduisons ici :

$$\frac{(y_a - y_{a+1})(y_b + y_{b+1})}{2\,y_a\,y_b}.$$

Pour la deuxième année, la valeur de l'assurance sera pareillement :

$$\frac{(y_{a+1} - y_{a+2})(y_{b+1} + y_{b+2})}{2\,y_a\,y_b}(1+i)^{-1};$$

Pour la troisième année :

$$\frac{(y_{a+2} - y_{a+3})(y_{b+2} + y_{b+3})}{2\,y_a\,y_b}(1+i)^{-2}.$$

et ainsi de suite, jusqu'à la limite des tables.

En réunissant ces diverses expressions et en effectuant les calculs indiqués, on peut les ramener à cette forme :

$$\frac{y_a y_b + y_{a+1} y_{b+1}(1+i)^{-1} + y_{a+2} y_{b+2}(1+i)^{-2} + \text{etc.},}{2\,y_a\,y_b}$$

$$- \frac{y_{a+1} y_{b+1} + y_{a+2} y_{b+2}(1+i)^{-1} + y_{a+3} y_{b+3}(1+i)^{-2} + \text{etc.}}{2\,y_a\,y_b}$$

$$+ \frac{y_a y_{b+1} + y_{a+1} y_{b+2}(1+i)^{-1} + y_{a+2} y_{b+3}(1+i)^{-2} + \text{etc.}}{2\,y_a\,y_b}$$

$$- \frac{y_{a+1} y_b + y_{a+2} y_{b+1}(1+i)^{-1} + y_{a+3} y_{b+2}(1+i)^{-2} + \text{etc.}}{2\,y_a\,y_b}$$

Digitized by Google

La première série sera égale à..... $\frac{1}{2}(1 + C_{a\,b})$

La deuxième id. ..... $\frac{1}{2}(1 + i)\,C_{a\,b}$

La troisième peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{2y_a y_{b+1}} \times \frac{y_{b+1}}{y_b}\left(\begin{matrix} y_a\,y_{b+1} + y_{a+1}\,y_{b+2}(1+i)^{-1} \\ + \text{etc.} \end{matrix}\right)$$

et l'on voit alors qu'elle est égale à.... $\frac{1}{2}\frac{y_{b+1}}{y_b}(1 + C_{a,\,b+1})$

La quatrième, qu'on peut transformer d'une manière analogue est égale à... $\frac{1}{2}\frac{y_{a+1}}{y_a}(1 + C_{a+1,\,b})$

En additionnant ces quatre termes et en simplifiant, on trouve enfin :

$$\frac{1}{2}\left\{1 - i\,C_{a\,b} + \frac{y_{b+1}}{y_b}(1 + C_{a,\,b+1}) - \frac{y_{a+1}}{y_a}(1 + C_{a+1,\,b})\right\}$$

pour la prime unique d'une assurance payable si la tête $B$ survit à $A$, que nous désignerons par $P_{\frac{a}{b}}$ .

La prime unique de l'assurance de survie payable au cas de prédécès de $B$ sera de même :

$$P_{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2}\left\{1 - i\,C_{a\,b} + \frac{y_{a+1}}{y_a}(1 + C_{a+1,\,b}) - \frac{y_{b+1}}{y_b}(1 + C_{a,\,b+1})\right\}$$

En additionnant ces deux quantités, on voit que la double assurance de survie est égale à $1 - i\,C_{a\,b}$, c'est-à-dire à la prime d'une assurance au premier décès, ce qu'il est facile de s'expliquer.

Si les âges $A$ et $B$ sont très-rapprochés, les deux der-

Digitized by Google

niers termes se neutralisent, et si les âges sont égaux, l'expression se réduit à :

$$P_{\frac{a}{a}} = \frac{1}{2}(1 - i\,C_{a,a}).$$

Si l'on divise la prime unique par $1 + C_{a\,b}$, on aura la prime annuelle exigible jusqu'au décès de l'une ou l'autre tête.

*Exemples* : On demande la prime unique ou annuelle d'une assurance de 100 francs payable si une tête de 50 ans survit à une tête de 35.

On aura à calculer :

$$\frac{100}{2}\left\{1 - i\,C_{35,50} + \frac{y_{51}}{y_{50}}(1 + C_{35,51}) - \frac{y_{36}}{y_{35}}(1 + C_{36,50})\right\},$$

Soit :

$$\frac{100}{2}\left(1 - 0{,}04 \times 9{,}1471 + 0{,}9740 \times 9{,}9729 - 0{,}9829 \times 10{,}0938\right)$$

ce qui donne 21 fr. 32 c. (1) pour la prime unique.

En divisant ce nombre par 10,1471, on aura pour la prime annuelle payable jusqu'au premier décès 2 fr. 10 c.

De même, si l'on veut connaître la prime unique

---

(1) Généralement, les tables d'annuité sur 2 têtes réunies ne donnent les différences d'âge que de 5 en 5 ans, et pour calculer les âges intermédiaires comme dans cet exemple, il faut prendre des moyennes. Dans ce calcul, on doit avoir soin de faire varier la tête la plus jeune, la plus âgée restant constante, car la différence entre les deux termes sera alors moins grande, et par suite, le résultat plus exact. Ainsi pour obtenir 35 et 51 ans, nous prendrons l'annuité sur 2 têtes de 31 et 51 ans, soit 9,1211, et l'annuité sur 2 têtes de 36 et 51 ans, soit 8,9358; la différence pour 5 ans est de 0,1853, dont le cinquième, soit 0,03706, doit être ajouté au second terme, ce qui donne 8,9729.

Digitized by Google

d'une assurance de 100 francs payable si une tête de 35 ans, survit à une tête de 50 ans, il faudra calculer :

$$\frac{100}{2}\left\{1 - i\,C_{35,\,50} + \frac{y_{36}}{y_{35}}(1 + C_{36,\,50}) - \frac{y_{51}}{y_{50}}(1 + C_{35,\,51})\right\},$$

ou bien :

$$\frac{100}{2}\left\{1 - 0{,}04 \times 9{,}1471 + 0{,}9829 \times 10{,}0938 - 0{,}9740 \times 9{,}9729\right\}$$

ce qui donne 42 fr. 08 c.

En divisant par 10,1471, on trouvera 4 fr. 15 c. pour la prime annuelle.

Si l'on réunit les résultats qui précèdent, on trouvera la valeur d'une assurance au premier décès de 2 têtes de 35 et 50 ans, soit pour la prime unique 63 fr. 40 c., et pour la prime annuelle 6 fr. 25 c.



Digitized by Google

## ASSURANCE TEMPORAIRE

### D'UN CAPITAL SUR DEUX TÊTES OU D'UNE RENTE DE SURVIE.

**64.** Quel est le prix d'une assurance de 1 franc payable si de 2 têtes $A$ et $B$ l'une quelconque meurt dans un intervalle de $n$ années?

Il est facile de conclure de ce qui précède que cette valeur est égale à :

$$1 - i\,C_{a\,b} - (1 - i\,C_{a+n,\,b+n})\,Q^n_{a\,b},$$

ou bien :

$$1 - Q^n_{a\,b} - i\left(C_{a\,b} - C^n_{a\,b}\right).$$

Si l'assurance n'est payable que dans le cas où les deux têtes viendraient à mourir dans le cours de $n$ années, on déduira du n° 62 cette expression :

$$1 - i\,C_a + 1 - i\,C_b - (1 - i\,C_{a\,b})$$
$$- \left\{(1 - i\,C_{a+n})\,Q^n_a + (1 - i\,C_{b+n})\,Q^n_b - (1 - i\,C_{a+n,\,b+n})\,Q^n_{a\,b}\right\}$$

ou bien :

$$1 - i\,C_a - (1 - i\,C_{a+n})\,Q^n_a + 1 - i\,C_b - (1 - i\,C_{b+n})\,Q^n_b$$
$$- \left\{1 - i\,C_{a\,b} - (1 - i\,C_{a+n,\,b+n})\,Q^n_{a\,b}\right\};$$

c'est-à-dire que le prix de l'assurance est égale à l'assurance temporaire sur chaque tête prise séparément, moins la même assurance sur les deux têtes réunies.

En simplifiant la formule, on la ramènera à ces termes :

$$1 - K^n_{a\,b} - i\left(V_{a\,b} - V^n_{a\,b}\right).$$

***Exemple*** : Quel est le prix d'une assurance de 100 francs payable :

1° Si 2 personnes âgées, l'une de 30 ans, l'autre

Digitized by Google

de 40 ans, meurent, l'une ou l'autre, dans un intervalle de 10 ans ;

2° Si elles meurent toutes deux dans ce délai ?

Dans le premier cas, il faudra calculer :

$$\left\{1 - Q^{10}_{30,\,40} - 0{,}04\left(C_{30,\,40} - C^{10}_{30,\,40}\right)\right\} 100 ;$$

$$Q^{10}_{30,\,40} = \frac{T_{40}}{T_{30}} \times \frac{T_{50}}{T_{40}} (1{,}04)^{10} = \frac{55309}{97115} \times \frac{30048}{55309} (1{,}04)^{10} = 0{,}458 ;$$

$$C_{30,\,40} = 10{,}7990 ; \quad C_{40,\,50} = 8{,}8808 ;$$

$$C^{10}_{30,\,40} = C_{40,\,50} \times Q^{10}_{30,\,40} = 8{,}8808 \times 0{,}4580 = 4{,}0674.$$

Nous aurons donc :

$$\left\{1 - 0{,}4580 - 0{,}04\,(10{,}7990 - 4{,}0674)\right\} 100 = 27{,}28.$$

Dans la deuxième hypothèse, on aura à chiffrer :

$$\left\{1 - K^{10}_{30,\,40} - 0{,}04\left(V_{30,\,40} - V^{10}_{30,\,40}\right)\right\} 100 ;$$

$$K^{10}_{30,\,40} = Q^{10}_{30} + Q^{10}_{40} - Q^{10}_{30,\,40} ;$$

$$Q^{10}_{30} = \frac{T_{40}}{T_{30}} = 0{,}5695, \quad Q^{10}_{40} = \frac{T_{50}}{T_{40}} = 0{,}5433 ;$$

d'où $K^{10}_{30,\,40} = 0{,}5695 + 0{,}5433 - 0{,}4580 = 0{,}6548 ;$

$$V_{30,\,40} = 15{,}0210 + 13{,}2856 - 10{,}7990 = 17{,}5076 ;$$

$$V^{10}_{30,\,40} = C^{10}_{30} + C^{10}_{40} - C^{10}_{30,\,40} ;$$

$$C^{10}_{30} = C_{40} \times Q^{10}_{30} = 13{,}2856 \times 0{,}5695 = 7{,}566 ;$$

$$C^{10}_{40} = C_{50} \times Q^{10}_{40} = 11{,}0159 \times 0{,}5433 = 5{,}985 ;$$

Donc : $V^{10}_{30,\,40} = 7{,}566 + 5{,}985 - 4{,}067 = 9{,}484.$

On aura enfin :

$$\left\{1 - 0{,}6548 - 0{,}04\,(17{,}5076 - 9{,}4840\right\} 100 = 2^{\text{f}}\,44.$$

Digitized by Google

Pour obtenir la prime annuelle, il faudra diviser, dans le premier cas, par l'annuité temporaire sur les 2 têtes réunies, et dans le deuxième, soit par cette même annuité, soit par l'annuité temporaire en reversion, suivant que la prime sera payable jusqu'au premier ou jusqu'au dernier décès.

65. Quelle est la valeur d'une rente de 1 franc sur une tête $A$, exigible si cette tête survit à une autre $B$, dans le cours de $n$ années ?

Il y a deux cas à examiner :

Celui où la rente cessera, en tout cas, à l'expiration de $n$ années, et celui où elle se prolongera jusqu'à la fin de la vie de la tête $A$, si elle survit à la tête $B$, dans le délai fixé.

Dans le premier cas, la quantité cherchée est égale à une rente temporaire sur la tête $A$, qu'on rendrait, si les têtes $A$ et $B$ vivaient simultanément pendant le même temps, soit :

$$C_a - C_a^n - \left(C_{ab} - C_{ab}^n\right),$$

ou bien :

$$C_a - C_{ab} - \left(C_a^n - C_{ab}^n\right).$$

Si l'on ajoute à cette expression la valeur d'une rente différée de $n$ années, sur la tête $A$, dans le cas où la tête $B$ serait décédée dans les $n$ premières années, c'est-à-dire la quantité $C_a^n\left(1 - \frac{y_{b+n}}{y_b}\right)$, on aura :

$$C_a - C_{ab} - \left(\frac{y_{b+n}}{y_b} C_a^n - C_{ab}^n\right) = C_a - C_{ab} - (C_{a+n} - C_{a+n,b+n}) Q_{ab}^n$$

ce qui est la valeur de la rente de survie dans le deuxième cas prévu.

Digitized by Google

*Exemples* : On demande la valeur d'une rente de 10 francs payable, si une tête âgée de 5 ans survit à une autre de 30, dans le délai de quinze années.

1° Si la rente est payable pendant l'intervalle des 15 années seulement, on aura :

$$10 \left\{ C_5 - C_{5,30} - \left( C_5^{15} - C_{5,30}^{15} \right) \right\}$$

et après avoir effectué les calculs intermédiaires,

$$10 \left\{ 18{,}1777 - 13{,}0080 - (7{,}8626 - 3{,}8429) \right\} = 11^{f}\ 50.$$

2° Si elle est viagère, on aura :

$$10 \left\{ C_5 - C_{5,30} - (C_{20} - C_{20,45})\, Q_{5,30}^{15} \right\}$$

$$= 10 \left\{ 18{,}1777 - 13{,}0080 - (16{,}4421 - 10{,}5407) 0{,}3645 \right\} = 30^{f}\ 18$$

La prime annuelle s'obtiendra, dans les deux cas, en divisant par l'annuité temporaire sur les 2 têtes réunies.

66. L'assurance temporaire de survie peut aussi avoir pour objet le payement d'un capital qui sera dû si une tête *B* survit à une tête *A* dans le courant de *n* années.

La valeur de cette assurance est facile à déterminer d'après le n° 37, car elle sera égale à la prime de l'assurance de survie pour toute la vie que nous avons désignée plus haut par $P_{\frac{a}{b}}$, moins la prime d'une pareille assurance aux âges $a + n$, $b + n$, c'est-à-dire $P_{\frac{a+n}{b+n}}$ ramenée à sa valeur actuelle, soit :

$$P_{\frac{a}{b}} - P_{\frac{a+n}{b+n}}\, Q_{a\,b}^{n}$$

Digitized by Google

*Exemple* : On demande la prime unique d'une assurance de 100 francs payable si une tête de 35 ans vient à mourir dans un délai de dix ans, avant une tête de 50 ans.

$100\,P\frac{35}{50}$ est égal, d'après le n° 63, à 21 fr. 32 c. ; on n'aura donc qu'à calculer :

$$100\,P\frac{45}{60} \times Q^{10}_{35,\,50}$$

$100 \times P\frac{45}{60}$ est représenté par :

$$\frac{100}{2}\left\{1 - i\,C_{45,\,60} + \frac{y_{61}}{y_{60}}(1 + C_{45,\,61}) - \frac{y_{46}}{y_{45}}(1 + C_{46,\,60})\right\}$$

$$= \frac{100}{2}\left\{\begin{array}{l} 1 - 0{,}04 \times 6{,}8973 \\ + \ 0{,}95698 \times 7{,}7046 \ - \ 0{,}9783 \times 7{,}8364 \end{array}\right\}.$$

On trouvera ainsi pour la valeur de $P\frac{45}{60}$, 21 fr. 52 c., qu'il faut multiplier par :

$$\frac{T_{45}}{T_{35}} \times \frac{T_{60}}{T_{50}} \times (1{,}04)^{10} = \frac{41112}{73597} \times \frac{14893}{30048} \times (1{,}04)^{10} = 0{,}4015$$

$$21{,}52 \times 0{,}4015 = 8{,}642.$$

Donc la prime unique demandée est égale à :

$$21{,}32 - 8{,}64 = 12^{f}\,68.$$

La prime annuelle étant payable pendant l'existence simultanée des 2 têtes et au maximum pendant dix ans, il suffira pour l'obtenir de diviser par :

$$1 - Q^{10}_{35,\,50} + C_{35,\,50} - C^{10}_{35,\,50},$$

soit :

$$1 - 0{,}4015 + 9{,}1471 - 6{,}8973 \times 0{,}4015 = 6{,}976$$

et l'on trouvera ainsi 1 fr. 82 c.

Digitized by Google

# DES ANNUITÉS

## ET DES ASSURANCES SUR PLUS DE 2 TÊTES.

67. Les problèmes auxquels donnent lieu ces opérations sont nombreux et compliqués ; ils exigent de longs calculs, surtout quand on est dépourvu des tables élémentaires auxquelles les formules se rapportent. Mais ils sont d'une application assez rare, et souvent dans la pratique on peut y substituer des combinaisons plus simples. On se contentera donc, ici, d'indiquer, en se limitant à 3 têtes, la solution des cas les plus ordinaires, soit d'une manière rigoureuse, soit par approximation.

68. Il convient d'examiner d'abord quelles sont les probabilités auxquelles donne lieu l'existence d'un groupe de 3 têtes :

1° La probabilité que 3 têtes, $A$, $B$, $C$ existeront toute trois dans $n$ années est égale à :

$$\frac{y_{a+n}}{y_a} \times \frac{y_{b+n}}{y_b} \times \frac{y_{c+n}}{y_c}, \text{ soit } \frac{y_{a+n}\, y_{b+n}\, y_{c+n}}{y_a\, y_b\, y_c}.$$

2° La probabilité que sur ces 3 têtes il n'en existera plus que 2 dans $n$ années a pour expression :

$$\frac{y_{a+n}}{y_a} \times \frac{y_{b+n}}{y_b}\left(1 - \frac{y_{c+n}}{y_c}\right) + \frac{y_{a+n}}{y_a} \times \frac{y_{c+n}}{y_c}\left(1 - \frac{y_{b+n}}{y_b}\right) + \frac{y_{b+n}}{y_b} \times \frac{y_{c+n}}{y_c}\left(1 - \frac{y_{a+n}}{y_a}\right),$$

c'est-à-dire la probabilité que $A$ et $B$ seront vivants et

Digitized by Google

*C* mort, plus la probabilité que *A* et *C* seront vivants et *B* mort, plus enfin la probabilité que *B* et *C* seront vivants et *A* mort.

Cette expression se réduit en la simplifiant à :

$$\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}}{y_a\,y_b}+\frac{y_{a+n}\,y_{c+n}}{y_a\,y_c}+\frac{y_{b+n}\,y_{c+n}}{y_b\,y_c}-3\,\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}\,y_{c+n}}{y_a\,y_b\,y_c}$$

3° La probabilité que sur 3 têtes il n'en existera qu'une seule dans *n* années se traduit par :

$$\frac{y_{a+n}}{y_a}\left(1-\frac{y_{b+n}}{y_b}\right)\left(1-\frac{y_{c+n}}{y_c}\right)+\frac{y_{b+n}}{y_b}\left(1-\frac{y_{c+n}}{y_c}\right)\left(1-\frac{y_{a+n}}{y_a}\right)+\frac{y_{c+n}}{y_c}\left(1-\frac{y_{b+n}}{y_b}\right)\left(1-\frac{y_{a+n}}{y_a}\right),$$

expression qui se réduit à :

$$\frac{y_{a+n}}{y_a}+\frac{y_{b+n}}{y_b}+\frac{y_{c+n}}{y_c}-2\left(\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}}{y_a\,y_b}+\frac{y_{a+n}\,y_{c+n}}{y_a\,y_c}+\frac{y_{b+n}\,y_{c+n}}{y_b\,y_c}\right)+3\,\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}\,y_{c+n}}{y_a\,y_b\,y_c}.$$

4° La probabilité que les 3 têtes ont cessé d'exister et qui est exprimée par :

$$\left(1-\frac{y_{a+n}}{y_a}\right)\left(1-\frac{y_{b+n}}{y_b}\right)\left(1-\frac{y_{c+n}}{y_c}\right)$$
$$=1-\frac{y_{a+n}}{y_a}-\frac{y_{b+n}}{y_b}-\frac{y_{c+n}}{y_c}+\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}}{y_a\,y_b}+\frac{y_{a+n}\,y_{c+n}}{y_a\,y_c}+\frac{y_{b+n}\,y_{c+n}}{y_b\,y_c}-\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}\,y_{c+n}}{y_a\,y_b\,y_c}.$$

Si l'on additionne les deux premiers paragraphes, on aura la probabilité que sur 3 têtes il en existe au moins 2, savoir :

$$\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}}{y_a\,y_b}+\frac{y_{a+n}\,y_{c+n}}{y_a\,y_c}+\frac{y_{b+n}\,y_{c+n}}{y_b\,y_c}-2\,\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}\,y_{c+n}}{y_a\,y_b\,y_c}.$$

Digitized by Google

Si l'on additionne les trois premières probabilités, on aura la probabilité que sur 3 têtes il en existe au moins une, savoir :

$$\frac{y_{a+n}}{y_a}+\frac{y_{b+n}}{y_b}+\frac{y_{c+n}}{y_c}-\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}}{y_a\,y_b}-\frac{y_{a+n}\,y_{c+n}}{y_a\,y_c}-\frac{y_{b+n}\,y_{c+n}}{y_b\,y_c}+\frac{y_{a+n}\,y_{b+n}\,y_{c+n}}{y_a\,y_b\,y_c}.$$

Enfin, si l'on additionne les quatre probabilités, on aura pour la somme 1, c'est-à-dire la certitude.

69. D'après ce qui précède, il est facile de déterminer la valeur d'une annuité viagère sur 3 têtes existant simultanément.

En la désignant par $C_{abc}$, on aura :

$$C_{abc}=\frac{y_{a+1}\,y_{b+1}\,y_{c+1}}{y_a\,y_b\,y_c}\left(1+i\right)^{-1}+\frac{y_{a+2}\,y_{b+2}\,y_{c+2}}{y_a\,y_b\,y_c}\left(1+i\right)^{-2}\text{ etc.,}$$

et on trouvera, en opérant comme aux n$^{os}$ 17 et 46 :

$$C_{abc}=\left(1+C_{a+1,\,b+1,\,c+1}\right)\frac{y_{a+1}\,y_{b+1}\,y_{c+1}}{y_a\,y_b\,y_c}\left(1+i\right)^{-1}$$

A l'aide de cette formule on peut calculer tout un système de tables sur 3 têtes. Mais il faut, pour une seule loi de mortalité et un même taux d'intérêt, former autant de tables qu'il y a de différences d'âge à combiner. En se bornant aux différences de 10 en 10 ans, on aurait à calculer 55 tables et environ 1,800 termes. Pour avoir toutes les différences de 5 en 5 ans, il faudrait quadrupler ces nombres ; on peut apprécier par là l'immensité de ce travail. S'il existe des tables manuscrites sur 3 têtes, elles sont certainement très-incomplètes, et aucune n'a été publiée. On y supplée dans la pratique par des approximations. Ainsi, supposons qu'on veuille

Digitized by Google

déterminer, d'après Deparcieux, la valeur d'une annuité sur 3 têtes réunies âgées de 30, 40 et 50 ans. On cherche dans une table sur 2 têtes la valeur d'une annuité sur les 2 têtes les plus âgées, soit 40 et 50 ans, et l'on trouve qu'elle est de 10,7346; en se reportant à une table sur une tête, on voit que cette annuité correspond à l'âge de 56 $^1/_2$ ans, et on substitue une tête de cet âge aux deux premières.

Reste à déterminer l'annuité sur 2 têtes de 56 $^1/_2$ ans et 30 ans qu'on trouvera dans la table sur 2 têtes en prenant des moyennes d'après la méthode indiquée page 80, et qui est égale à 9,7189. Le calcul rigoureux donne pour cette valeur 9,6760. On peut juger, par cet exemple, du degré d'approximation.

70. Connaissant la valeur d'une annuité sur 3 têtes existant simultanément, si l'on veut déterminer la valeur d'une rente sur 3 têtes exigible tant qu'il en restera au moins 2, on trouvera, en se basant sur ce qui a été dit au n° 68 :

$$C_{ab} + C_{ac} + C_{bc} - 2\,C_{abc}.$$

Si l'on cherche quelle est la valeur d'une annuité sur 3 têtes exigible tant qu'il en restera au moins une, c'est-à-dire payable jusqu'au dernier décès, on trouvera : $C_a + C_b + C_c - C_{ab} - C_{ac} - C_{bc} + C_{abc}$ qu'on désignera, pour simplifier, par $V_{abc}$.

Prenons pour exemple 3 têtes âgées de 40, 50 et 60 ans.

Soit, 7,3739 la valeur exacte de l'annuité sur ces 3 têtes réunies, on aura pour l'annuité exigible tant qu'il en existera au moins 2 :

$$C_{40,\,50} + C_{40,\,60} + C_{50,\,60} - 2\,C_{40,\,50,\,60} =$$
$$10.7346 + 8,7223 + 8,0596 - 2 \times 7,3739 = 12,7687.$$

Digitized by Google

On aura pour l'annuité exigible jusqu'au dernier décès :

$$C_{40} + C_{50} + C_{60} - C_{40,50} - C_{40,60} - C_{50,60} + C_{40,50,60} =$$
$$15{,}1326 + 12{,}5256 + 9{,}7130 - (10{,}7346 + 8{,}7223 + 8{,}0596)$$
$$+ 7{,}3739 = 17{,}2286.$$

71. Les rentes de survie qui reposent sur 3 têtes présentent des combinaisons assez nombreuses, mais dont la solution est facile d'après ce qui précède :

1° Rente payable au décès de la tête $C$ au profit de $A$ et $B$ tant qu'ils existeront simultanément.

La probabilité de cet événement dans un intervalle quelconque de $n$ années étant $\frac{y_{a+n}\, y_{b+n}}{y_a\, y_b}\left(1 - \frac{y_{c+n}}{y_c}\right)$, on en déduira que le prix de la rente est égal à :

$$C_{ab} - C_{abc}.$$

2° Rente payable au décès de $C$ sur les 2 têtes $A$ et $B$ tant qu'elles existeront ensemble ou l'une d'elles seulement.

La probabilité de cet événement dans un intervalle de $n$ années est représentée par :

$$\left(\frac{y_{a+n}}{y_a} + \frac{y_{b+n}}{y_b} - \frac{y_{a+n}\, y_{b+n}}{y_a\, y_b}\right)\left(1 - \frac{y_{c+n}}{y_c}\right);$$

la valeur de la rente sera par suite :

$$C_a + C_b - C_{ab} - C_{ac} - C_{bc} + C_{abc}.$$

3° Rente payable après le décès de $B$ et de $C$ au profit de $A$ survivant. La probabilité de cet événement dans un intervalle de $n$ années est :

$$\frac{y_{a+n}}{y_a}\left(1 - \frac{y_{b+n}}{y_b}\right)\left(1 - \frac{y_{c+n}}{y_c}\right);$$

Digitized by Google

d'où l'on déduit pour le prix de la rente :

$$C_a - C_{ab} - C_{ac} + C_{abc}.$$

4° Rente payable au décès de l'une quelconque des 3 têtes au profit du groupe survivant.

C'est le premier cas généralisé.

On aura donc, en répétant la 1re formule pour chaque groupe et en réunissant :

$$C_{ab} + C_{ac} + C_{bc} - 3\,C_{abc}.$$

5° Rente payable au décès de l'une quelconque des 3 têtes au profit des deux survivants, tant qu'ils existeront ensemble ou séparément.

En reproduisant la 2e formule pour chaque tête et en réunissant, on trouvera :

$$2\,(C_a + C_b + C_c) - 3\,(C_{ab} + C_{ac} + C_{bc}) + 3\,C_{abc}.$$

6° Rente payable après le décès de 2 quelconques des 3 têtes au profit du dernier vivant.

En reproduisant la 3e formule pour chaque tête et en réunissant, on aura :

$$C_a + C_b + C_c - 2\,(C_{ab} + C_{ac} + C_{bc}) + 3\,C_{abc}.$$

Il est à remarquer que généralement dans l'expres- des rentes de survie la somme des coefficients des termes positifs est égale à la somme des coefficients des termes négatifs.

En effet, ces coefficients exprimant la quotité de la rente à servir, doivent se balancer, tant qu'il n'y a rien à payer.

On trouvera quelques applications de ces formules dans les numéros suivants.

Digitized by Google

72. Trois personnes $A$, $B$, $C$, achètent en commun une rente sur leurs têtes payable jusqu'au dernier décès, et conviennent de faire une espèce de tontine dans laquelle la rente sera partagée également entre les vivants et appartiendra en entier au dernier qui survivra. On se demande dans quelle proportion chaque personne devra contribuer à l'achat de la rente.

Voyons d'abord ce que doit payer $A$.

La rente devant être partagée par tiers tant que les 3 têtes existeront, chacune doit d'abord payer $\frac{1}{3} C_{abc}$.

Après le premier décès, $A$ jouira de la moitié de la rente tant qu'il vivra conjointement soit avec $B$, soit avec $C$. D'après le premier paragraphe du numéro précédent, cette chance est représentée par :

$$\frac{1}{2}\left(C_{ab} + C_{ac} - 2C_{abc}\right).$$

Enfin, la rente appartiendra en totalité à $A$ s'il survit aux deux autres. C'est le troisième cas prévu dans le numéro précédent ; une pareille éventualité vaut donc :

$$C_a - C_{ab} - C_{ac} + C_{abc}.$$

En réunissant les quantités ci-dessus, on aura pour la part contributive de $A$ :

$$\frac{1}{3} C_{abc} + \frac{1}{2}\left(C_{ab} + C_{ac} - 2C_{abc}\right) + C_a - C_{ab} - C_{ac} + C_{abc},$$

et en simplifiant :

$$C_a - \frac{1}{2}\left(C_{ab} + C_{ac}\right) + \frac{1}{3} C_{abc}.$$

On trouvera de même pour la part contributive de $B$ :

$$C_b - \frac{1}{2}\left(C_{ab} + C_{bc}\right) + \frac{1}{3} C_{abc},$$

Digitized by Google

et enfin pour la part de $C$ :

$$C_c - \frac{1}{2}\left(C_{ac} + C_{bc}\right) + \frac{1}{3} C_{abc}.$$

Ces trois quantités réunies sont bien égales à $V_{abc}$.

En prenant pour exemple 3 têtes âgées de 40, 50 et 60 ans, on trouvera :

Pour la part contributive de la tête de 40 ans (d'après Deparcieux),

$$15{,}1326 - \frac{1}{2}(10{,}7346 + 8{,}7223) + \frac{1}{3} \times 7{,}3739 = \quad 7{,}8621$$

Pour la part de la tête de 50 ans,

$$12{,}5256 - \frac{1}{2}(10{,}7346 + 8{,}0596) + \frac{1}{3} \times 7{,}3739 = \quad 5{,}5865$$

Pour la part de la tête de 60 ans,

$$9{,}7130 - \frac{1}{2}(8{,}7223 + 8{,}0596) + \frac{1}{3} \times 7{,}3739. = \quad 3{,}7800$$

Ces trois quantités réunies donnent..... 17,2286 prix de la rente sur les 3 têtes avec réversion au profit du dernier vivant.

73. Voici encore un problème reposant sur les considérations du n° 71 :

$A$, $B$, $C$ conviennent d'acheter une annuité payable jusqu'à leur dernier décès. $A$ et $B$ en jouiront également pendant leur existence simultanée, et si $B$ meurt le premier, $A$ entrera en jouissance de la totalité de la rente; mais si $A$ prédécède, $B$ et $C$ se la partageront également pendant leur existence simultanée, et, dans

Digitized by Google

tous les cas, le dernier vivant en aura la totalité. Déterminer la valeur de leurs parts respectives.

Voyons d'abord ce que doit payer $A$.

L'existence de $C$ n'ayant pas d'influence sur sa condition, il doit le prix d'une demi-annuité sur sa tête et celle de $B$, plus le prix d'une annuité entière dont il jouira s'il survit à $B$, soit :

$$\frac{1}{2} C_{ab} + C_a - C_{ab} = C_a - \frac{1}{2} C_{ab}.$$

Quant à $B$, il doit d'abord comme $A$, $\frac{1}{2} C_{ab}$.

Puis, comme au cas de prédécès de $A$, il doit partager la rente par moitié avec $C$, il devra pour le prix de cette éventualité, conformément au 1^er^ § du n° 71, $\frac{1}{2}(C_{bc} - C_{abc})$.

Enfin, au décès de $A$ et $C$, il doit être propriétaire de la totalité de la rente, ce qui, d'après le § 3, est équivalent à :

$$C_b - C_{ab} - C_{bc} + C_{abc}.$$

En réunissant ces trois quantités on trouve pour la part de $B$ :

$$C_b - \frac{1}{2}\left(C_{ab} + C_{bc} - C_{abc}\right).$$

Enfin $C$ jouira comme $B$ de la moitié de la rente au cas de prédécès de $A$, et de la totalité en cas de prédécès de $A$ et $B$, ce qui vaut :

$$\frac{1}{2}\left(C_{bc} - C_{abc}\right) + C_c - C_{ac} - C_{bc} + C_{abc}$$
$$= C_c - C_{ac} - \frac{1}{2}\left(C_{bc} - C_{abc}\right).$$

Digitized by Google

Si l'on réunit les trois parts contributives, on trouve bien la valeur d'une rente sur les 3 têtes avec réversion.

Supposons que $A$ soit âgé de 60 ans, $B$ de 50 ans et $C$ de 40 ans, on aura :

Pour la part contributive de $A$,

$$9{,}7130 - \frac{1}{2} \times 8{,}0596 \ldots\ldots\ldots\ldots = 5{,}6832$$

Pour la part de $B$ :

$$12{,}5256 - \frac{1}{2}\,(8{,}0596 + 10{,}7346 - 7{,}3739) \ldots = 6{,}8155$$

Pour la part de $C$ :

$$15{,}1326 - 8{,}7223 - \frac{1}{2}\,(10{,}7346 - 7{,}3739) \ldots = 4{,}7299$$

Total des trois parts..... 17,2286

comme dans l'exemple précédent.

74. L'assurance d'un capital payable au décès se résoudra facilement d'après ce qui précède.

Une somme de 1 franc payable au premier décès de l'une quelconque des 3 têtes $A$, $B$, $C$ aura pour valeur :

$$1 - i\,C_{abc}.$$

Pour obtenir la prime annuelle exigible pendant l'existence conjointe, il suffira de diviser par $1 + C_{abc}$.

Une somme assurée sur un groupe de 3 têtes et payable après le décès de 2 d'entre elles sera représentée par :

$$1 - i\,(C_{ab} + C_{ac} + C_{bc} - 2\,C_{abc}).$$

Dans ce cas, la prime annuelle peut être payable, soit

Digitized by Google

pendant l'existence conjointe, et le diviseur sera le même que dans le cas précédent, soit jusqu'au second décès, et alors il faudra diviser par :

$$1 + C_{ab} + C_{ac} + C_{bc} - 2\,C_{abc}.$$

Enfin, une somme exigible au dernier décès d'un groupe de 3 têtes aura pour expression :

$$1 - i\,V_{abc},$$

qu'il faudra diviser, pour obtenir la prime annuelle,

soit par $1 + C_{abc}$,
soit par $1 + C_{ab} + C_{ac} + C_{bc} - 2\,C_{abc}$,
soit par $1 + V_{abc}$,

suivant les conditions dans lesquelles elle sera payable.

75. Les assurances de survie sur 3 têtes présentent de nombreuses questions; nous nous bornerons à en résoudre quelques-unes pour donner des exemples de ce genre d'analyse, d'une application d'ailleurs fort rare.

Cherchons quel est le prix d'une assurance exigible si des 3 têtes *A*, *B*, *C*, la tête *A* meurt la première.

Pour que le capital assuré soit dû, il faut que l'un ou l'autre des cas suivants se réalise :

1° Que *A* meure, *B* et *C* étant vivants, ce qui, pour la première année, est exprimé par la probabilité :

$$\frac{y_a - y_{a+1}}{y_a} \times \frac{y_{b+1}}{y_b} \times \frac{y_{c+1}}{y_c}.$$

2° Que *A* et *B* ou bien *A* et *C* meurent dans l'année et que *A* meure le premier. En supposant que les différences d'âge ne soient pas trop grandes, la probabilité du double décès étant d'ailleurs assez petite, on peut admettre que la chance de prédécès est égale pour chaque tête et équivalente par conséquent à $\frac{1}{2}$; cela posé,



Digitized by Google

la probabilité des événements ci-dessus est exprimée pour la première année par :

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{y_a - y_{a+1}}{y_a} \times \frac{y_b - y_{b+1}}{y_b} \times \frac{y_{c+1}}{y_c} + \frac{y_a - y_{a+1}}{y_a} \times \frac{y_c - y_{c+1}}{y_c} \times \frac{y_{b+1}}{y_b}\right\}.$$

3° Que $A$, $B$ et $C$ meurent tous les trois dans l'année et que $A$ meure le premier, ce qui, en supposant les chances de décès égales pour chaque tête, est équivalent, toujours pour la première année, à :

$$\frac{1}{3} \times \frac{y_a - y_{a+1}}{y_a} \times \frac{y_b - y_{b+1}}{y_b} \times \frac{y_c - y_{c+1}}{y_c}.$$

En réunissant ces diverses probabilités et en simplifiant, on trouve que la probabilité totale pour la première année est égale à :

$$\frac{1}{6 y_a y_b y_c}\left\{\begin{array}{l} y_a y_b y_{c+1} - y_{a+1} y_b y_{c+1} + y_a y_{b+1} y_c - y_{a+1} y_{b+1} y_c \\ + 2 y_a y_b y_c - 2 y_{a+1} y_b y_c + 2 y_a y_{b+1} y_{c+1} - 2 y_{a+1} y_{b+1} y_{c+1} \end{array}\right\}$$

Pour avoir la valeur actuelle de l'assurance pendant la première année, il faudrait multiplier cette expression par $(1+i)^{-\frac{1}{2}}$ ; mais nous négligeons ce facteur comme nous l'avons fait dans les questions semblables.

En opérant de la même manière, on trouvera pour la valeur de l'assurance pendant la deuxième année :

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{y_a y_b y_c}\left(1+i\right)^{-1}\left\{\begin{array}{l} y_{a+1} y_{b+1} y_{c+2} - y_{a+2} y_{b+1} y_{c+2} \\ + y_{a+1} y_{b+2} y_{c+1} - y_{a+2} y_{b+2} y_{c+1} \\ + 2 y_{a+1} y_{b+1} y_{c+1} - 2 y_{a+2} y_{b+1} y_{c+1} \\ + 2 y_{a+1} y_{b+2} y_{c+2} - 2 y_{a+2} y_{b+2} y_{c+2} \end{array}\right\},$$

et ainsi de suite pour les années suivantes (1).

(1) En se reportant au n° 63, on voit qu'on a suivi une autre méthode pour 2 têtes; mais on aurait pu faire une analyse semblable. Ainsi, la probabilité que $A$ vive et que $B$ meure sera exprimée par $\frac{y_a - y_{a+1}}{y_a} \times \frac{y_{b+1}}{y_b}$;

Digitized by Google

Si l'on réunit ces diverses expressions, on trouvera les résultats suivants :

$$\frac{1}{6\,y_a y_b y_c}\left\{2\,y_a y_b y_c + 2\,y_{a+1}\,y_{b+1}\,y_{c+1}\left(1+i\right)^{-1} + \text{etc.}\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 + C_{a\,b\,c}\right);$$

$$\frac{1}{6\,y_a y_b y_c}\left\{2y_{a+1}\,y_{b+1}\,y_{c+1} + 2\,y_{a+2}\,y_{b+2}\,y_{c+2}\left(1+i\right)^{-1} + \text{etc.}\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\,C_{a\,b\,c}\,(1+i);$$

$$\frac{1}{6\,y_a y_b y_c}\left\{y_a\,y_b\,y_{c+1} + y_{a+1}\,y_{b+1}\,y_{c+2}\left(1+i\right)^{-1} + \text{etc.}\right\} =$$

$$\frac{1}{6y_a y_b y_{c+1}} \times \frac{y_{c+1}}{y_c}\left\{y_a\,y_b\,y_{c+1} + y_{a+1}\,y_{b+1}\,y_{c+2}\left(1+i\right)^{-1} + \text{etc.}\right\}$$
$$= \frac{y_{c+1}}{y_c}\left(1 + C_{a,b,c+1}\right)\frac{1}{6};$$

$$\frac{1}{6\,y_a y_b y_c}\left\{y_{a+1}\,y_b\,y_{c+1} + y_{a+2}\,y_{b+1}\,y_{c+2}\left(1+i\right)^{-1} + \text{etc.}\right\} =$$

$$\frac{1}{6y_{a+1} y_b y_{c+1}} \times \frac{y_{a+1}\,y_{c+1}}{y_a\,y_c}\left\{y_{a+1}\,y_b\,y_{c+1} + y_{a+2}\,y_{b+1}\,y_{c+2}\left(1+i\right)^{-1} + \text{etc.}\right\}$$
$$= \frac{y_{a+1}\,y_{c+1}}{y_a\,y_c}\left(1 + C_{a+1,\,b,\,c+1}\right)\frac{1}{6};$$

---

la probabilité qu'ils meurent tous deux, mais que A meure le premier, sera $\frac{1}{2}\left\{\frac{y_a - y_{a+1}}{y_a} \times \frac{y_b - y_{b+1}}{y_b}\right\}$.

En réunissant et simplifiant, on trouvera pour la première année :

$$\frac{1}{2\,y_a\,y_b}\left\{y_a\,y_b - y_{a+1}\,y_{b+1} + y_a\,y_{b+1} - y_{a+1}\,y_b\right\};$$

pour la deuxième année :

$$\frac{1}{2\,y_a\,y_b}\left(1+i\right)^{-1}\left\{y_{a+1}\,y_{b+1} - y_{a+2}\,y_{b+2} + y_{a+1}\,y_{b+2} - y_{a+2}\,y_{b+1}\right\}, \text{ et}$$

ainsi de suite; et l'on obtiendra ainsi, en décomposant, quatre séries égales à celles qui ont été trouvées au susdit numéro.

Digitized by Google

et, en opérant de même pour les autres séries, on trouve enfin pour le résultat cherché :

$$\frac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} 1 - i\,C_{a,b,c} - \dfrac{y_{a+1}}{y_a}(1 + C_{a+1,b,c}) + \dfrac{1}{2}\dfrac{y_{b+1}}{y_b}(1 + C_{a,b+1,c}) \\ + \dfrac{1}{2}\dfrac{y_{c+1}}{y_c}(1 + C_{a,b,c+1}) + \dfrac{y_{b+1}\,y_{c+1}}{y_b\,y_c}(1 + C_{a,b+1,c+1}) \\ - \dfrac{1}{2}\dfrac{y_{a+1}\,y_{c+1}}{y_a\,y_c}(1 + C_{a+1,b,c+1}) - \dfrac{1}{2}\dfrac{y_{a+1}\,y_{b+1}}{y_a\,y_b}(1 + C_{a+1,b+1,c}) \end{array}\right\}$$

que nous désignerons par $P_{\frac{a}{bc}}$.

Si les âges $b$, $c$, sont égaux, cette expression se réduit à :

$$P_{\frac{a}{b,b}} =$$

$$\frac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} 1 - i\,C_{a,b,b} - \dfrac{y_{a+1}}{y_a}(1 + C_{a+1,b,b}) + \dfrac{y_{b+1}}{y_b}(1 + C_{a,b,b+1}) \\ + \left(\dfrac{y_{b+1}}{y_b}\right)^2(1 + C_{a,b+1,b+1}) - \dfrac{y_{a+1}\,y_{b+1}}{y_a\,y_b}(1 + C_{a+1,b,b+1}) \end{array}\right\}.$$

Et enfin, si les 3 âges sont égaux, on n'a plus que :

$$P_{\frac{a}{a,a}} = \frac{1}{3}(1 - i\,C_{a,a,a}).$$

76. Recherchons encore quel est le prix d'une assurance dans le cas où des 3 têtes $A$ meurt le second.

On peut résoudre ce problème par une analyse semblable à celle du numéro précédent, mais on peut arriver à cette solution plus simplement par les considérations suivantes :

L'assurance se réalisera si $A$ meurt avant $B$, mais ne meurt pas le premier, et de même si $A$ meurt avant $C$, sans toutefois succomber le premier. L'opération revient donc :

1° A une assurance sur les 2 têtes $A$ et $B$ exigible

Digitized by Google

dans le cas où *A* mourrait avant *B*, assurance que l'on rendrait si *A* mourait le premier des 3 têtes *A*, *B*, *C*.

2° A une assurance semblable sur les 2 têtes *A* et *C*, que l'on rendrait dans les mêmes conditions. On aura donc pour la solution cherchée :

$$P_{\frac{a}{b}} + P_{\frac{a}{c}} - 2\,P_{\frac{a}{bc}}.$$

Si les âges sont égaux, l'expression ci-dessus se réduit à :

$$2\left(P_{\frac{a}{a}} - P_{\frac{a}{a,a}}\right) = \frac{1 - i\,(3\,C_{a,\,a} - 2\,C_{a,\,a,\,a})}{3}.$$

77. Examinons enfin quel sera le prix de l'assurance, à condition que *A* meure le dernier.

Il est évident que le prix de cette assurance sera égal au prix d'une assurance sur la tête de *A* seule, dont on déduira la valeur des assurances dans le cas où *A* mourrait le premier ou le second des trois. On trouvera ainsi pour le prix demandé :

$$1 - i\,C_a - P_{\frac{a}{bc}} - \left(P_{\frac{a}{b}} + P_{\frac{a}{c}} - 2\,P_{\frac{a}{bc}}\right)$$

$$= 1 - i\,C_a - P_{\frac{a}{b}} - P_{\frac{a}{c}} + P_{\frac{a}{bc}}.$$

Si les 3 têtes sont du même âge, cette expression se réduira à :

$$\frac{1 - i\,(3\,C_a - 3\,C_{a,\,a} + C_{a,\,a,\,a})}{3}.$$

Nous ne pousserons pas plus loin l'examen des questions de ce genre, qui n'ont guère qu'un intérêt théorique, car, à défaut de tables sur 3 têtes, on ne peut pas calculer d'exemples.

---

Digitized by Google

## CONCLUSION.

On a vu dans ce qui précède que toutes les questions relatives aux rentes viagères et aux assurances sur la vie se résolvent par des règles certaines, et que les seuls éléments laissés à l'appréciation sont les tables de mortalité dont on doit faire usage et le taux d'intérêt qu'il convient d'appliquer.

On a déjà dit que les compagnies d'assurance ont adopté comme base de leurs calculs les tables de mortalité de Deparcieux et de Duvillard. Ces tables, d'une date ancienne, sont loin cependant d'être exactes. La mortalité donnée par Duvillard est trop rapide, sinon pour la classe générale d'où elle a été tirée, du moins pour la classe choisie qui a recours aux assurances, et de laquelle les compagnies ont soin d'élaguer les individus dont la constitution est faible ou la santé altérée. Il résulte de là que les tarifs des assurances exigibles en cas de décès sont trop élevés, et ils seraient onéreux pour le public si les compagnies n'y avaient remédié en accordant aux assurés une part dans leurs bénéfices. Cette part, qui, suivant leurs statuts, est de 50 p. 100 des profits provenant des assurances sur la vie entière, ou de 25 p. 100 des bénéfices provenant de la généralité de leurs opérations, est appliquée, au choix des assurés, à l'augmentation des sommes garanties sans aucun accroissement de charges, ou à la réduction des primes à payer sans aucune diminution de la somme garantie. Cette combinaison, dont

Digitized by Google

l'expérience a déjà démontré les heureux effets, est préférable, sans contredit, à un abaissement des tarifs, qui exposerait les compagnies à des pertes et pourrait, en affaiblissant leurs garanties, compromettre les intérêts des assurés eux-mêmes.

La mortalité de Deparcieux, plus lente que celle de Duvillard, a été adoptée pour le calcul des rentes viagères; mais, comme cette mortalité est trop rapide encore dans les âges avancés pour la classe d'élite sur laquelle elle agit, les compagnies ont été obligées de corriger, à dater de l'âge de 60 ans, d'après les résultats de leur expérience. Ces corrections, qui altèrent la concordance des tables, sont regrettables, et il serait préférable qu'une loi de mortalité régulièrement établie pour tous les âges servît de régulateur unique pour tous les calculs de rentes viagères.

Quant à l'élément de l'intérêt, le taux que les compagnies ont généralement adopté est celui de 4 p. 100. Il n'a point varié en ce qui concerne les assurances en cas de décès, et cette immobilité, malgré les variations fréquentes du taux de l'intérêt dans les transactions en général, n'a pas eu grand inconvénient, car ces assurances se contractent presque toujours moyennant des primes annuelles, et le taux d'intérêt a peu d'influence sur la détermination de ces primes.

Pour les rentes viagères, l'intérêt a été élevé jusqu'à 4 1/2 dans certaines circonstances, et réduit dans d'autres à 3 1/2; mais il est resté le plus souvent fixé à 4, et si l'on considère que les compagnies, dans ce genre d'opérations, ne se sont réservé aucun bénéfice sur la mortalité et que la longévité a souvent dépassé leurs prévisions, on trouvera légitime le bénéfice de 1 p. 100 environ qu'elles s'attribuent sur leurs placements: d'autant

Digitized by Google

mieux qu'elles sont astreintes par leurs statuts à ne faire emploi de leurs fonds que dans des valeurs qui offrent au public toute sécurité.

Ce serait une grave erreur de croire qu'on peut écarter tout cet appareil scientifique et établir des tarifs pour les assurances sur la vie comme on le fait pour les assurances maritimes ou contre l'incendie, par une méthode empirique.

Dans ces dernières, les risques varient, mais la nature de l'assurance est uniforme; les assurances sont de courte durée, et même, quand elles sont souscrites pour plusieurs années, elles peuvent être considérées comme des assurances annuelles qui se succèdent les unes aux autres. Les primes sont trop modiques comparativement aux sommes assurées pour que les intérêts de ces primes soient pris en considération. Dans les assurances sur la vie ou les annuités viagères, les opérations se prolongent pendant toute l'existence des individus, les combinaisons sont très-variées, l'intérêt des fonds joue un rôle important.

Toutes ces considérations exigent des formules précises, concordantes, qu'on ne peut obtenir que par une analyse rigoureuse. Les assureurs qui les négligeraient s'exposeraient à une foule d'erreurs, tantôt au préjudice des assurés, tantôt au leur, ne pourraient jamais connaître exactement leur position et compromettraient leur avenir.

Digitized by Google

# NOTE

## SUR LA FORMULE DE MOIVRE.

Il existe pour le calcul des annuités, soit sur une tête, soit sur 2 têtes, une méthode trop intéressante pour qu'on la passe sous silence dans un traité même élémentaire sur la matière, et nous allons l'exposer ici avec les développements qu'elle comporte. Cette méthode, connue sous le titre d'hypothèse de Moivre, du nom de son auteur, est basée sur l'observation suivante :

Quand on considère dans une table de mortalité les termes consécutifs qui expriment le nombre des vivants à chaque âge, on remarque que les différences entre ces nombres sont à peu près constantes dans les âges moyens de la vie ; elles varient, ensuite, tout en restant uniformes pour une autre série de termes, de telle sorte que la table peut être considérée comme une suite de progressions par différences décroissantes.

Soit $d$ la différence entre $y_a$ et $y_{a+1}$, et supposons cette différence constante durant $n$ années, on aura pour la valeur de l'annuité viagère pendant ce temps :

$$\frac{1}{y_a}\left\{\frac{y_a-d}{(1+i)}+\frac{y_a-2d}{(1+i)^2}+\frac{y_a-3d}{(1+i)^3}+\ldots\ldots+\frac{y_a-nd}{(1+i)^n}\right\},$$

qu'on peut décomposer ainsi :

$$(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+(1+i)^{-3}+\ldots\ldots+(1+i)^{-n}$$

$$-\frac{d}{y_a}\left\{(1+i)^{-1}+2(1+i)^{-2}+3(1+i)^{-3}+\ldots\ldots+n(1+i)^{-n}\right\}.$$

La première série est égale à $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, soit $I_n$.

Digitized by Google

Si on appelle $I'_n$ la seconde série, abstraction faite du facteur commun, et qu'on la retranche de la précédente, on verra que :

$$I'_n - I_n = (1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-3} \ldots + (n-1)(1+i)^{-n}$$

En multipliant les deux termes de cette égalité par $1+i$, on aura .

$$(I'_n - I_n)(1+i) =$$

$$(1+i)^{-1} + 2(1+i)^{-2} \ldots\ldots + (n-1)(1+i)^{-(n-1)}$$

En rapprochant cette expression de la valeur de $I'_n$, on trouve :

$$(I'_n - I_n)(1+i) = I'_n - n(1+i)^{-n};$$

$$\text{d'où } I'_n = \frac{I_n(1+i) - n(1+i)^{-n}}{i}.$$

En multipliant par $\frac{d}{y_a}$, que nous avons laissé de côté, et en ajoutant le premier terme, la valeur totale de l'annuité viagère pendant $n$ années sera :

$$I_n - \frac{d}{y_a} \times \frac{I_n(1+i) - n(1+i)^{-n}}{i}.$$

Si après $n$ années et à partir d'un âge $a+n$, la différence change et devient $d'$ qui reste constant pendant $n'$ années, il faudra ajouter une quantité semblable en la ramenant à sa valeur à l'âge $a$, c'est-à-dire en la multipliant par $\frac{y_{a+n}}{y_a}(1+i)^{-n}$, soit

$$\left\{ I_{n'} - \frac{d'}{y_{a+n}} \times \frac{I_{n'}(1+i) - n'(1+i)^{-n'}}{i} \right\} \frac{y_{a+n}}{y_a}(1+i)^{-n}.$$

Si après $n'$ années, on suppose une troisième différence $d''$ constante pendant $n''$ années, la troisième série de l'annuité sera exprimée par :

$$\left\{ I_{n''} - \frac{d''}{y_{a+n+n'}} \times \frac{I_{n''}(1+i) - n''(1+i)^{-n''}}{i} \right\} \frac{y_{a+n+n'}}{y_a}(1+i)^{-(n+n')}$$

Digitized by Google

et l'on aura ainsi autant de termes qu'il y aura de différences dans la table de mortalité dont on fera usage, de l'âge $a$ à la limite de la vie.

Cette expression peut être ramenée à une forme plus élégante, et cette simplification est due à un travail qu'a bien voulu nous communiquer M. Charlon, directeur du *Phénix espagnol* à Madrid. Voici sa méthode :

Supposons, pour fixer les idées, que de l'âge $a$ à la limite il y ait cinq différences $d$, $d'$, $d''$, $d'''$, $d''''$ constantes pendant $n$, $n'$, $n''$, $n'''$, $n''''$ années, et, pour abréger la notation, posons :

$$n+n'=t',\ n+n'+n''=t'',\ n+n'+n''+n'''=t''',\ \text{etc.}$$

Nous aurons, pour la valeur de l'annuité, en remplaçant dans les premiers termes $I_n$, $I_{n'}$, $I_{n''}$ par leur valeur, et en effectuant les calculs après avoir multiplié par $i\,y_a$ :

$$\begin{aligned}
&C_a \times i\,y_a = \\
&\quad y_a - y_a\,(1+i)^{-n} - d \times I_n\,(1+i) + nd\,(1+i)^{-n} \\
&+ y_{a+n}\,(1+i)^{-n} - y_{a+n}\,(1+i)^{-t'} - \\
&\quad - d' \times I_{n'}\,(1+i)\,(1+i)^{-n} + n'\,d'\,(1+i)^{-t'} \\
&+ y_{a+t'}\,(1+i)^{-t'} - y_{a+t'}\,(1+i)^{-t''} - \\
&\quad - d'' \times I_{n''}\,(1+i)\,(1+i)^{-t'} + n''\,d''\,(1+i)^{-t''} \\
&+ y_{a+t''}\,(1+i)^{-t''} - y_{a+t''}\,(1+i)^{-t'''} - \\
&\quad - d''' \times I_{n'''}\,(1+i)\,(1+i)^{-t''} + n'''\,d'''\,(1+i)^{-t'''} \\
&+ y_{a+t'''}\,(1+i)^{-t'''} - y_{a+t'''}\,(1+i)^{-t''''} - \\
&\quad - d'''' \times I_{n''''}\,(1+i)\,(1+i)^{-t'''} + n''''\,d''''\,(1+i)^{-t''''}
\end{aligned}$$

Mais si l'on remarque que $y_a - y_{a+n} = nd$, $y_{a+n} - y_{a+t'} = n'\,d'$, etc., et enfin $y_{a+t'''} = n''''\,d''''$, on verra que, dans l'expression ci-dessus les termes $n\,d\,(1+i)^{-n} - y_a\,(1+i)^{-n} + y_{a+n}\,(1-i)^{-n} = 0$. De même les termes $n'\,d'\,(1+i)^{-t'} - y_{a+n}\,(1+i)^{-t'} + y_{a+t'}\,(1+i)^{-t'}$ se détruisent, et ainsi de suite ; la valeur de l'annuité se réduira donc à :

$$\frac{1}{i\,y_a}\left\{y_a - (1+i)\left[d\,I_n + d'\,I_{n'}(1+i)^{-n} + d''\,I_{n''}(1+i)^{-t'} + d'''\,I_{n'''}(1+i)^{-t''} + d''''\,I_{n''''}(1+i)^{-t'''}\right]\right\}.$$

Digitized by Google

Si l'on remplace dans cette formule $I_n$, $I_{n'}$, etc., par leurs équivalents, on trouvera pour la valeur de $C_a$ :

$$\frac{1}{i} - \frac{1+i}{i^2 y_a}\left\{d - \left[\begin{array}{c}(d-d')(1+i)^{-n} + (d'-d'')(1+i)^{-i'} \\ +(d''-d''')(1+i)^{-i''}+(d'''-d'''')(1+i)^{-i'''} \\ + d''''(1+i)^{-i''''}\end{array}\right]\right\}$$

La loi d'après laquelle se composent les divers termes de cette série est évidente, et elle permettra d'écrire de suite la valeur de $C_a$, quel que soit le nombre des hypothèses qu'on veuille faire.

Si l'on suppose qu'il n'y a qu'une seule différence et qu'elle soit égale à 1, tous les termes $d - d'$, $d' - d''$ s'annulent; $y_a$ devient égal à $n$, et la formule se réduit à :

$$C_a = \frac{1}{i} - \frac{1+i}{i^2 n}\left(1-(1+i)^{-n}\right) = \frac{ni-(1-(1+i)^{-n})(1+i)}{ni^2}$$

ou en remplaçant $1-(1+i)^{-n}$ par son équivalent $iI_n$ :

$$\frac{ni - iI_n(1+i)}{ni^2} = \frac{n - I_n(1+i)}{ni},$$

ce qui est précisément la formule de Moivre dans son expression la plus simple, et telle que l'a donnée son auteur.

Cherchons à composer, d'après la formule qui précède, une table d'annuités, d'après une loi de mortalité qui se rapproche le plus possible de celle de Deparcieux et l'intérêt à 4 p. 100.

Supposons à 20 ans 820 vivants, et que :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| de 20 à 50 | ans, période de | 30 | ans, il en meure | 8 | par an, |
| 50 à 60 | id. | 10 | id. | 12 | id. |
| 60 à 68 | id. | 8 | id. | 15 | id. |
| 68 à 80 | id. | 12 | id. | 19 | id. |
| 80 à 87 | id. | 7 | id. | 12 | id. |
| 87 à 94 | id. | 7 | id. | 4 | id. |

Digitized by Google

Nous aurons, en laissant indéterminées les quantités $y_a$ et $n$, pour faciliter le calcul des nombres intermédiaires :

De 20 à 50 ans :

$$\frac{1}{0,04} - \frac{1,04}{0,0016\,y_a}\left\{8 - \left[\begin{array}{l} 8 - 12 + (12-15)\,(1,04)^{-10} \\ +(15-19)(1,04)^{-18} + (19-12)(1,04)^{-30} \\ +(12-4))1,04)^{-37} + 4 \times 1,04)^{-44} \end{array}\right] 1,04^{-n}\right\}$$

Et en effectuant les calculs :

$$C_a = 25 - \frac{650}{y_a}\left\{8 + 3,25641 \times (1,04)^{-n}\right\}.$$

Cette expression, dans laquelle $n = 50 - a$, permettra de calculer toutes les annuités comprises entre 20 et 50, en attribuant successivement à $y_a$ et à $n$ leurs valeurs.

On trouvera, de même, de 50 à 60 ans, $a$ étant compris dans ces limites :

$$C_a = 25 - \frac{650}{y_a}\left\{12 - 1,100693 \times (1,04)^{-n'}\right\};$$

De 60 à 68 ans :

$$C_a = 25 - \frac{650}{y_a}\left\{15 - 5,612071 \times (1,04)^{-n''}\right\};$$

De 68 à 80 :

$$C_a = 25 - \frac{650}{y_a}\left\{19 - 15,38924 \times (1,04)^{-n'''}\right\};$$

De 80 à 87 :

$$C_a = 25 - \frac{650}{y_a}\left\{12 - 11,03967 \times (1,04)^{-n''''}\right\};$$

De 87 à 94 :

$$C_a = 25 - \frac{650}{y_a}\left\{4 - 4 \times (1,04)^{-n'''''}\right\}.$$

Les exemples suivants, calculés de 5 en 5 et comparés à l'an-

Digitized by Google

nuité calculée d'après Deparcieux, donnent le degré d'approximation :

| | Hypothèse. | Deparcieux. |
|---|---|---|
| 20 ans. | 17,863 | 17,938 |
| 25 » | 17,310 | 17,419 |
| 30 » | 16,667 | 16,809 |
| 35 » | 15,892 | 16,084 |
| 40 » | 14,955 | 15,133 |
| 45 » | 13,807 | 13,904 |
| 50 » | 12,385 | 12,525 |
| 55 » | 11,131 | 11,173 |
| 60 » | 9,600 | 9,713 |
| 65 » | 8,098 | 8,039 |
| 70 » | 6,430 | 6,394 |
| 75 » | 4,967 | 4,945 |
| 80 » | 4,047 | 3,596 |
| 85 » | 2,600 | 2,424 |
| 90 » | 1,401 | 1,187 |

L'hypothèse de Moivre s'applique aussi aux annuités sur 2 têtes, mais sa généralisation donnerait lieu à des formules compliquées et à des calculs pénibles ; nous nous bornerons donc à l'exposer ici telle que l'a donnée son auteur, c'est-à-dire, en supposant que la décroissance d'un âge à l'autre est constante et égale à 1. Dans ce système, si $B$ est la plus âgée des 2 têtes, la valeur de l'annuité aura pour expression :

$$\frac{1}{y_a y_b}\Big\{(y_a-1)(y_b-1)(1+i)^{-1}+(y_a-2)(y_b-2)(1+i)^{-2}+\ldots + (y_a-n)(y_b-n)(1+i)^{-n}\Big\}$$

$n$ représentant le nombre d'années à courir de l'âge $b$ à la limite de la vie.

En effectuant la multiplication, cette série se décompose en quatre autres :

La première est égale à :

$$(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\ldots+(1+i)^{-n}=I_n ;$$

Les deuxième et troisième, qu'on peut réunir, seront représentées par :

$$\frac{y_a+y_b}{y_a y_b}\Big\{(1+i)^{-1}+2(1+i)^{-2}+\ldots+n(1+i)^{-n}\Big\} = \frac{y_a+y_b}{y_a y_b}\times I'_n .$$

Digitized by Google

La quatrième est égale à :

$$\frac{1}{y_a y_b}\left\{(1+i)^{-1}+2^2(1+i)^{-2}+3^2(1+i)^{-3}+\ldots+n^2(1+i)^{-n}.\right\}$$

Et si nous représentons par $I''_n$, pour suivre notre notation, la somme des termes $(1+i)^{-1}+2^2(1+i)^{-2}$, etc., la série sera exprimée par $\frac{1}{y_a y_b}\times I''_n$.

Nous aurons ainsi, pour la valeur de l'annuité, en plaçant $\frac{1}{y_a y_b}$ en facteur commun :

$$C_{a\,b}=\frac{1}{y_a y_b}\left\{I_n\,y_a\,y_b-(y_a+y_b)\,I'_n+I''_n\right\}.$$

Nous connaissons déjà la valeur de $I_n$ et celle de $I'_n$ ; reste à déterminer celle de $I_n$. Nous avons :

$$I''_n=(1+i)^{-1}+2^2(1+i)^{-2}+3^2(1+i)^{-3}+\ldots+n^2(1+i)^{-n}.$$

En multipliant les deux termes de cette égalité par $(1+i)^{-1}$ et en retranchant la seconde équation, qu'on obtiendra ainsi de la précédente, on trouvera :

$$I''_n(1-(1+i)^{-1})=(1+i)^{-1}+3(1+i)^{-2}+5(1+i)^{-3}+\ldots-n^2(1+i)^{-(n+1)}.$$

Si l'on rapproche cette valeur de celles de $I'_n$ et de $I_n$, on verra que la série des seconds termes, abstraction faite du dernier, est égale à $2I'_n-I_n$ ; on a donc :

$$I''_n(1-(1+i)^{-1})=2I'_n-I_n-n^2(1+i)^{-(n+1)},$$

d'où $I''_n=\frac{(2I'_n-I_n)(1+i)-n^2(1+i)^{-n}}{i}$ ;

ou bien, en substituant à $I'_n$ sa valeur

$$I''_n=\frac{(2I_n+i\,I_n-2n(1+i)^{-n})(1+i)}{i^2}-\frac{n^2(1+i)^{-n}}{i}.$$

En remplaçant dans la formule qui donne la valeur de $C_{a\,b}$, $I'_n$ et $I''_n$ par leurs valeurs, et en développant, après avoir eu soin de placer $i$ en diviseur commun, on trouve :

Digitized by Google

$$C_{a\,b} =$$

$$\frac{1}{i y_a y_b}\left\{\begin{array}{l} I_n i y_a y_b - I_n y_a (1+i) + n y_a (1+i)^{-n} - y_b I_n (1+i) \\ + n y_b (1+i)^{-n} + \dfrac{(2 I_n + i I_n - 2n(1+i)^{-n})(1+i)}{i} - n^2 (1+i)^{-n} \end{array}\right\}.$$

Si l'on observe que $y_b$ est égal à $n$, on voit de suite que deux termes se détruisent; de plus, en remplaçant $(1+i)^{-n}$ par son équivalent $1 - I_n i$, le terme $n\,y_a\,(1+i)^{-n}$ devient $n\,y_a - I_n\,i\,n\,y_a$, ce qui annule le premier terme de la formule et permet d'isoler $\frac{n\,y_a}{i\,y_a\,y_t}$ ou $\frac{1}{i}$. On obtiendra d'autres simplifications, en remplaçant aussi $(1+i)^{-n}$ par sa valeur dans l'avant-dernier terme, et on trouvera en résumé :

$$C_{a\,b} = \frac{1}{i} - \frac{1+i}{i\,y_a\,y_b}\left\{I_n\left(y_a - n - 1 - \frac{2}{i}\right) + \frac{2n}{i}\right\},$$

si les 2 têtes sont du même âge $y_a = n$, et l'expression se réduira à :

$$C_{a,a} = \frac{1}{i} + \frac{1+i}{i\,n^2}\left\{I_n\left(1 + \frac{2}{i}\right) - \frac{2n}{i}\right\}.$$

Cherchons, d'après la formule qui précède, la valeur d'une annuité sur 2 têtes de 60 et 65 ans. Si l'on suppose comme Moivre que le nombre des vivants est de 86, on aura $y_{65} = n = 21$, $y_{60} = 26$; donc :

$$C_{60,65} =$$

$$\frac{1}{0{,}04} - \frac{1{,}04}{0{,}04 \times 21 \times 26}\left\{I_{21}\left(26 - 21 - 1 - \frac{2}{0{,}04}\right) + \frac{2 \times 21}{0{,}04}\right\}.$$

On trouve dans la table d'intérêts composés que $I_{21} = 14{,}0292$; on aura donc à calculer :

$$25 + \frac{1{,}04}{21{,}84}(14{,}0292 \times 46 - 1050) = 5{,}74.$$

La table de Deparcieux donne 6,21.

Nous avons, dans ce calcul, suivi Moivre, qui limite à 86 ans la durée de la vie humaine; mais ce terme est évidemment trop court, et rien n'empêche d'en prendre tout autre, par exemple, 95 ans comme dans Deparcieux. On peut même, par une correction assez ingénieuse, faire varier la limite à chaque annuité

Digitized by Google

qu'on calcule. Il suffit pour cela de remarquer que, dans l'hypothèse de Moivre, la vie moyenne est égale à la moitié du nombre des vivants. On peut donc, dans la formule, remplacer $n$, $y_a$ et $y_b$ par le double de la vie moyenne calculée exactement d'après la table de mortalité dont on veut faire usage. Ainsi, si l'on prend Deparcieux et qu'on veuille calculer le prix de l'annuité sur deux têtes de 60 et 65, on trouve que la vie moyenne à 60 ans est de 14,25, et à 65 ans de 11,26. Par conséquent la valeur de $C_{60,\,65}$ est égale à :

$$25 - \frac{1,04}{0,04 \times 28,50 \times 22,52}\left\{I_{22,52}\left(28,50 - 22,52 - 1 - \frac{2}{0,04}\right) + \frac{2 \times 22,52}{0,04}\right\}$$

$I_{22,\,52} = 14,6619.$

On aura donc, en effectuant les calculs :

$$C_{60,\,65} = 25 + \frac{1,04}{25,672}\left\{14,6619 \times 45,02 - 1126\right\} = 6,10.$$

Ce résultat, comme on le voit, se rapproche beaucoup plus de celui de Deparcieux.

On fera la même substitution avec autant d'avantage et encore plus de simplicité dans la formule proprement dite de Moivre sur une tête. On trouvera, de cette façon :

$$C_{60} = \frac{28,50 - 16,82 \times 1,04}{28,50 \times 0,04} = 9,658.$$

Ces diverses solutions sont intéressantes et peuvent rendre des services dans la pratique, si l'on veut obtenir isolément quelques termes, en changeant l'intérêt ou la loi de mortalité ; mais lorsqu'on aura à calculer une table entière il vaudra mieux procéder d'après les règles que nous avons établies. Le travail ne sera guère plus long et on aura, en outre, pour les tables sur une tête, l'avantage de déterminer $T_a$ et $S_a$, qui servent pour un grand nombre de calculs. En tout cas, le résultat sera plus exact, et c'est à quoi il faut s'attacher surtout, car le prix de l'annuité servant de base à toutes les autres opérations, on ne saurait le calculer avec une trop grande précision.



Digitized by Google

**N° 1.** — *Table d'une annuité viagère sur une seule tête d'après la loi de mortalité de* **Deparcieux** *et l'intérêt à 4 p.* 100 (1).

| AGES. | Nombres des vivants. | Nombres des vivants mult. par $(1+i)^{\omega-a}$ $T_a$. | Sommes des nombres $T_a$ $S_a$. | Prix d'une annuité de 1 franc. |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1359 | 54244.23 | 817447.06 | 14.0697 |
| 1 | 1092 | 41910.53 | 763202.83 | 17.2103 |
| 2 | 1043 | 38490.34 | 721292.30 | 17.7396 |
| 3 | 1000 | 35484.11 | 682801.96 | 18.2425 |
| 4 | 970 | 33095.75 | 647317.85 | 18.5590 |
| 5 | 948 | 31101.09 | 614222.10 | 18.7492 |
| 6 | 930 | 29337.07 | 583121.01 | 18.8765 |
| 7 | 915 | 27753.75 | 553783.94 | 18.9535 |
| 8 | 902 | 26307.14 | 526030.19 | 18.9957 |
| 9 | 890 | 24958.81 | 499723.05 | 19.0219 |
| 10 | 880 | 23729.21 | 474764.24 | 19.0076 |
| 11 | 872 | 22609.12 | 451035.03 | 18.9492 |
| 12 | 866 | 21589.95 | 428425.91 | 19.8437 |
| 13 | 860 | 20615.74 | 406835.96 | 18.7342 |
| 14 | 854 | 19684.52 | 386220.22 | 18.6204 |
| 15 | 848 | 18794.46 | 366535.70 | 18.5023 |
| 16 | 842 | 17943.73 | 347741.24 | 18.3795 |
| 17 | 835 | 17110.15 | 329797.51 | 18.2749 |
| 18 | 828 | 16314.13 | 312687.37 | 18.1666 |
| 19 | 821 | 15554.05 | 296373.24 | 18.0544 |
| 20 | 814 | 14828.31 | 280819.19 | 17.9380 |
| 21 | 806 | 14117.86 | 265990.88 | 17.8407 |
| 22 | 798 | 13440.13 | 251873.02 | 17.7404 |
| 23 | 790 | 12793.64 | 238432.89 | 17.6369 |
| 24 | 782 | 12177.01 | 225639.25 | 17.5299 |
| 25 | 774 | 11588.87 | 213462.24 | 17.4196 |
| 26 | 766 | 11027.97 | 201873.37 | 17.3056 |
| 27 | 758 | 10493.08 | 190845.40 | 17.1877 |
| 28 | 750 | 9983.01 | 180352.32 | 17.0659 |
| 29 | 742 | 9496.66 | 170369.31 | 16.9399 |
| 30 | 734 | 9032.95 | 160872.65 | 16.8095 |
| 31 | 726 | 8590.87 | 151839.70 | 16.6745 |
| 32 | 718 | 8169.41 | 143248.83 | 16.5347 |
| 33 | 710 | 7767.69 | 135079.42 | 16.3899 |

(1) La table de Deparcieux ne va que jusqu'à trois ans; on a calculé les termes inférieurs d'après la mortalité de Kerseboom. (Annuités Hollandaises.)

Digitized by Google

*Suite de la Table n° 1.*

| AGES. | Nombres des vivants. | Nombres des vivants mult. par $(1+i)^{\omega-a}$ $T_a$. | Sommes des nombres $T_a$ $S_a$. | Prix d'une annuité de 1 franc. |
|---|---|---|---|---|
| 34 | 702 | 7384.78 | 127311.72 | 16.2396 |
| 35 | 694 | 7019.83 | 119926.94 | 16.0840 |
| 36 | 686 | 6672.03 | 112907.11 | 15.9224 |
| 37 | 678 | 6340.59 | 106235.08 | 15.7548 |
| 38 | 671 | 6033.78 | 99894.19 | 15.5557 |
| 39 | 664 | 5741.19 | 93860.71 | 15.3487 |
| 40 | 657 | 5462.18 | 88119.52 | 15.1326 |
| 41 | 650 | 5196.13 | 82657.34 | 14.9075 |
| 42 | 643 | 4942.47 | 77461.21 | 14.6726 |
| 43 | 636 | 4700.65 | 72518.74 | 14.4274 |
| 44 | 629 | 4470.10 | 67818.09 | 14.1714 |
| 45 | 622 | 4250.34 | 63347.99 | 13.9042 |
| 46 | 615 | 4040.88 | 59097.65 | 13.6250 |
| 47 | 607 | 3834.91 | 55056.77 | 13.3567 |
| 48 | 599 | 3638.82 | 51221.86 | 13.0765 |
| 49 | 590 | 3446.29 | 47583.04 | 12.8070 |
| 50 | 581 | 3263.20 | 44136.75 | 12.5256 |
| 51 | 571 | 3083.68 | 40873.55 | 12.2547 |
| 52 | 560 | 2907.96 | 37789.87 | 11.9953 |
| 53 | 549 | 2741.19 | 34881.91 | 11.7248 |
| 54 | 538 | 2582.95 | 32140.72 | 11.4434 |
| 55 | 526 | 2428.21 | 29557.77 | 11.1727 |
| 56 | 514 | 2281.56 | 27129.56 | 10.8908 |
| 57 | 502 | 2142.57 | 24848.00 | 10.5972 |
| 58 | 489 | 2006.82 | 22705.43 | 10.3140 |
| 59 | 476 | 1878.34 | 20698.61 | 10.0196 |
| 60 | 463 | 1756.77 | 18820.27 | 9.7130 |
| 61 | 450 | 1641.77 | 17063.50 | 9.3933 |
| 62 | 437 | 1533.03 | 15421.73 | 9.0597 |
| 63 | 423 | 1426.84 | 13888.70 | 8.7339 |
| 64 | 409 | 1326.55 | 12461.86 | 8.3942 |
| 65 | 395 | 1231.87 | 11135.31 | 8.0394 |
| 66 | 380 | 1139.51 | 9903.44 | 7.6910 |
| 67 | 364 | 1049.54 | 8763.93 | 7.3503 |
| 68 | 347 | 962.05 | 7714.39 | 7.0187 |
| 69 | 329 | 877.06 | 6752.34 | 6.6988 |
| 70 | 310 | 794.63 | 5875.28 | 6.3938 |
| 71 | 291 | 717.23 | 5080.65 | 6.0837 |

Digitized by Google

*Suite de la Table n° 1.*

| AGES. | Nombres des vivants. | Nombres des vivants mult. par $(1+i)^{\omega-a}$ $T_a$. | Sommes des nombres $T_a$ $S_a$. | Prix d'une annuité de 1 franc. |
|---|---|---|---|---|
| 72 | 271 | 642.25 | 4363.42 | 5.7940 |
| 73 | 251 | 571.97 | 3721.17 | 5.5059 |
| 74 | 231 | 506.15 | 3149.20 | 5.2218 |
| 75 | 211 | 444.54 | 2643.05 | 4.9455 |
| 76 | 192 | 388.96 | 2198.51 | 4.6520 |
| 77 | 173 | 336.99 | 1809.55 | 4.3758 |
| 78 | 154 | 288.44 | 1472.56 | 4.1052 |
| 79 | 136 | 244.93 | 1184.12 | 3.8346 |
| 80 | 118 | 204.34 | 939.19 | 3.5962 |
| 81 | 101 | 168.17 | 734.85 | 3.3696 |
| 82 | 85 | 136.09 | 566.68 | 3.1641 |
| 83 | 71 | 109.30 | 430.59 | 2.9395 |
| 84 | 59 | 87.34 | 321.29 | 2.6796 |
| 85 | 48 | 68.32 | 233.95 | 2.4243 |
| 86 | 38 | 52.01 | 165.63 | 2.1847 |
| 87 | 29 | 38.16 | 113.62 | 1.9773 |
| 88 | 22 | 27.84 | 75.46 | 1.7105 |
| 89 | 16 | 19.47 | 47.62 | 1.4461 |
| 90 | 11 | 12.87 | 28.15 | 1.1873 |
| 91 | 7 | 7.87 | 15.28 | 0.9410 |
| 92 | 4 | 4.33 | 7.41 | 0.7119 |
| 93 | 2 | 2.08 | 3.08 | 0.4807 |
| 94 | 1 | 1.00 | 1.00 | 0.0000 |
| 95 | 0 | 0.00 | 0.00 | 0.0000 |

Digitized by Google

**N° 2.** — *Table d'une annuité viagère sur une seule tête d'après la loi de mortalité de* DUVILLARD *et l'intérêt à 4 p. 100.*

| AGES. | Nombres des vivants. | Nombres des vivants mult. par $(1+i)^{\omega-a}$ $T_a$. | Sommes des nombres $T_a$ $S_a$. | Prix d'une annuité de 1 franc. |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1000000 | 71884311 | 907057472 | 11.618242 |
| 1 | 767525 | 53050964 | 835173161 | 14.742773 |
| 2 | 671834 | 44650806 | 782122197 | 16.516414 |
| 3 | 624668 | 39919330 | 737471391 | 17.474037 |
| 4 | 598713 | 36789119 | 697552061 | 17.960826 |
| 5 | 583151 | 34454706 | 660762942 | 18.177741 |
| 6 | 573025 | 32554239 | 626308236 | 18.238923 |
| 7 | 565838 | 30909560 | 593753997 | 18.209405 |
| 8 | 560245 | 29426953 | 562844437 | 18.126842 |
| 9 | 555486 | 28054793 | 533417484 | 18.013428 |
| 10 | 551122 | 26763840 | 505362691 | 17.882306 |
| 11 | 546888 | 25536753 | 478598851 | 17.741587 |
| 12 | 542630 | 24363393 | 453062098 | 17.596027 |
| 13 | 538255 | 23237459 | 428698705 | 17.448617 |
| 14 | 533711 | 22155082 | 405461246 | 17.301063 |
| 15 | 528969 | 21113694 | 383306164 | 17.154403 |
| 16 | 524020 | 20111685 | 362192470 | 17.009070 |
| 17 | 518863 | 19447850 | 342080785 | 16.865248 |
| 18 | 513502 | 18221159 | 322932935 | 16.722973 |
| 19 | 507949 | 17330880 | 304711776 | 16.582019 |
| 20 | 502216 | 16476231 | 287380896 | 16.442156 |
| 21 | 496317 | 15456442 | 270904665 | 16.303086 |
| 22 | 490267 | 14870764 | 255248223 | 16.164405 |
| 23 | 484083 | 14118448 | 240377459 | 16.025778 |
| 24 | 477777 | 13398592 | 226259011 | 15.886785 |
| 25 | 471366 | 12710389 | 212860419 | 15.746945 |
| 26 | 464863 | 12052917 | 200150030 | 15.605916 |
| 27 | 458282 | 11425276 | 188097113 | 15.463217 |
| 28 | 451635 | 10826500 | 176671837 | 15.318427 |
| 29 | 444932 | 10255596 | 165845337 | 15.171171 |
| 30 | 438183 | 9711571 | 155589741 | 15.021041 |
| 31 | 431398 | 9193452 | 145878170 | 14.867610 |
| 32 | 424583 | 8700212 | 136684718 | 14.710481 |
| 33 | 417744 | 8230840 | 127984506 | 14.549357 |
| 34 | 410886 | 7784341 | 119753666 | 14.383889 |

Digitized by Google

*Suite de la Table n° 2.*

| AGES. | Nombres des vivants. | Nombres des vivants mult. par $(1+i)^{\omega-a}$ $T_a$. | Sommes des nombres $T_a$ $S_a$. | Prix d'une annuité de 1 franc. |
|---|---|---|---|---|
| 35 | 404012 | 7359723 | 111969325 | 14.213768 |
| 36 | 397123 | 6955989 | 104609602 | 14.038750 |
| 37 | 390219 | 6572170 | 97653613 | 13.858644 |
| 38 | 383301 | 6207361 | 91081443 | 13.673131 |
| 39 | 376363 | 5860582 | 84874082 | 13.482190 |
| 40 | 369404 | 5530980 | 79013500 | 13.285624 |
| 41 | 362419 | 5217687 | 73482520 | 13.083351 |
| 42 | 355400 | 4919843 | 68264833 | 12.875411 |
| 43 | 348342 | 4636670 | 63344990 | 12.661743 |
| 44 | 341235 | 4367377 | 58708320 | 12.442468 |
| 45 | 334072 | 4111250 | 54340943 | 12.217628 |
| 46 | 326843 | 3867582 | 50229693 | 11.987368 |
| 47 | 319539 | 3635724 | 46362111 | 11.751827 |
| 48 | 312148 | 3415028 | 42726387 | 11.511295 |
| 49 | 304662 | 3204931 | 39311359 | 11.265910 |
| 50 | 297070 | 3004870 | 36106428 | 11.015976 |
| 51 | 289361 | 2814321 | 33101558 | 10.761835 |
| 52 | 281527 | 2632816 | 30287237 | 10.503747 |
| 53 | 273560 | 2459912 | 27644421 | 10.242007 |
| 54 | 265450 | 2295178 | 25194509 | 9.977119 |
| 55 | 257193 | 2138256 | 22899331 | 9.709320 |
| 56 | 248782 | 1988776 | 20761075 | 9.439082 |
| 57 | 240214 | 1846426 | 18772299 | 9.166790 |
| 58 | 231488 | 1710916 | 16925873 | 8.892828 |
| 59 | 222605 | 1581983 | 15214957 | 8.617622 |
| 60 | 213567 | 1489378 | 13632974 | 8.341604 |
| 61 | 204380 | 1342885 | 12173596 | 8.065227 |
| 62 | 195054 | 1232316 | 10830711 | 7.788877 |
| 63 | 185600 | 1127487 | 9598395 | 7.513049 |
| 64 | 176035 | 1028252 | 8470908 | 7.238123 |
| 65 | 166377 | 934459 | 7442656 | 6.964620 |
| 66 | 156651 | 845993 | 6508197 | 6.692913 |
| 67 | 146882 | 762727 | 5662204 | 6.423576 |
| 68 | 137102 | 684559 | 4899477 | 6.157066 |
| 69 | 127347 | 611396 | 4214919 | 5.893873 |
| 70 | 117656 | 543143 | 3603523 | 5.634525 |
| 71 | 108070 | 479703 | 3060380 | 5.379687 |
| 72 | 98637 | 420992 | 2580677 | 5.129933 |

Digitized by Google

*Suite de la Table n° 2.*

| AGES. | Nombres des vivants | Nombres des vivants mult. par $(1+i)^{\omega-a}$ $T_a$. | Sommes des nombres $T_a$ $S_a$. | Prix d'une annuité de 1 franc. |
|---|---|---|---|---|
| 73 | 89404 | 366908 | 2159686 | 4.886188 |
| 74 | 80423 | 317356 | 1792778 | 4.649110 |
| 75 | 71745 | 272223 | 1475421 | 4.419907 |
| 76 | 63424 | 231395 | 1203198 | 4.199772 |
| 77 | 55511 | 194736 | 971803 | 3.990379 |
| 78 | 48057 | 162103 | 777067 | 3.793688 |
| 79 | 41107 | 133326 | 614965 | 3.612482 |
| 80 | 34705 | 108233 | 481638 | 3.450027 |
| 81 | 28886 | 86621 | 373406 | 3.310825 |
| 82 | 23680 | 68278 | 286785 | 3.200252 |
| 83 | 19106 | 52971 | 218507 | 3.125051 |
| 84 | 15175 | 40454 | 165536 | 3.091962 |
| 85 | 11886 | 30467 | 125082 | 3.105448 |
| 86 | 9224 | 22735 | 94615 | 3.161730 |
| 87 | 7165 | 16980 | 71880 | 3.233126 |
| 88 | 5670 | 12921 | 54899 | 3.249023 |
| 89 | 4686 | 10268 | 41979 | 3.088528 |
| 90 | 3830 | 8069 | 31711 | 2.929930 |
| 91 | 3093 | 6266 | 23642 | 2.773197 |
| 92 | 2466 | 4804 | 17376 | 2.617437 |
| 93 | 1938 | 3630 | 12573 | 2.463768 |
| 94 | 1499 | 2700 | 8943 | 2.312725 |
| 95 | 1140 | 1974 | 6243 | 2.162671 |
| 96 | 851 | 1417 | 4269 | 2.013000 |
| 97 | 620 | 993 | 2852 | 1.873523 |
| 98 | 442 | 680 | 1860 | 1.733138 |
| 99 | 307 | 454 | 1179 | 1.595072 |
| 100 | 207 | 295 | 725 | 1.460264 |
| 101 | 135 | 185 | 430 | 1.328634 |
| 102 | 84 | 100 | 245 | 1.220716 |
| 103 | 51 | 65 | 135 | 1.091015 |
| 104 | 29 | 35 | 70 | 0.995543 |
| 105 | 16 | 19 | 35 | 0.876599 |
| 106 | 8 | 9 | 16 | 0.823034 |
| 107 | 4 | 4 | 7 | 0.711908 |
| 108 | 2 | 2 | 3 | 0.480769 |
| 109 | 1 | 1 | 1 | 0.000000 |
| 110 | 0 | 0 | 0 | 0.000000 |

Digitized by Google

**N° 3.** — *Valeur d'une annnité viagère de 1 franc sur et l'intérêt*

| AGE du plus jeune. | DIFFÉRENCE D'AGE. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 an. | 5 ans. | 10 ans. | 15 ans. |
| 0 | 8,6757 | 11,5809 | 11,8094 | 11,5731 |
| 1 | 12,9743 | 14,2791 | 14,4250 | 14,0895 |
| 2 | 13,7909 | 14,8028 | 14,8156 | 14,4701 |
| 3 | 14,6026 | 15,2883 | 15,1829 | 14,8287 |
| 4 | 15,1406 | 15,6126 | 15,3929 | 15,0344 |
| 5 | 15,4855 | 15,8027 | 15,4961 | 15,1362 |
| 6 | 15,7344 | 15,9066 | 15,5449 | 15,2056 |
| 7 | 15,9047 | 15,9305 | 15,5695 | 15,2342 |
| 8 | 16,0211 | 15,9238 | 15,5646 | 15,2347 |
| 9 | 16,1143 | 15,9019 | 15,5453 | 15,2220 |
| 10 | 16,1419 | 15,8442 | 15,4914 | 15,1763 |
| 11 | 16,0970 | 15,7476 | 15,4203 | 15,0945 |
| 12 | 15,9737 | 15,6292 | 15,3101 | 14,9738 |
| 13 | 15,8453 | 15,5062 | 15,1959 | 14,8487 |
| 14 | 15,7115 | 15,3782 | 15,0776 | 14,7188 |
| 15 | 15,5720 | 15,2450 | 14,9549 | 14,5839 |
| 16 | 15,4265 | 15,1263 | 14,8276 | 14,4437 |
| 17 | 15,3136 | 15,0223 | 14,7141 | 14,3162 |
| 18 | 15,1966 | 14,9148 | 14,5966 | 14,1839 |
| 19 | 15,0751 | 14,8037 | 14,4749 | 14,0466 |
| 20 | 14,9489 | 14,6888 | 14,3489 | 13,9039 |
| 21 | 14,8171 | 14,5891 | 14,2371 | 13,7739 |
| 22 | 14,7627 | 14,4865 | 14,1217 | 13,6392 |
| 23 | 14,6657 | 14,3809 | 14,0024 | 13,4779 |
| 24 | 14,5660 | 14,2721 | 13,8791 | 13,3097 |
| 25 | 14,4634 | 14,1598 | 13,7516 | 13,1342 |
| 26 | 14,3577 | 14,0440 | 13,6196 | 12,9509 |
| 27 | 14,2488 | 13,9244 | 13,4828 | 12,7593 |
| 28 | 14,1365 | 13,8008 | 13,3195 | 12,5588 |
| 29 | 14,0207 | 13,6729 | 13,1492 | 12,3489 |
| 30 | 13,9011 | 13,5405 | 12,9715 | 12,1289 |
| 31 | 13,7775 | 13,4034 | 12,7859 | 11,8982 |
| 32 | 13,6497 | 13,2612 | 12,5919 | 11,6769 |
| 33 | 13,5174 | 13,0925 | 12,3889 | 11,4448 |

Digitized by Google

2 *têtes réunies d'après la loi de mortalité de* DEPARCIEUX *à 4 p. 100.*

| DIFFÉRENCE D'AGE. | | | | AGE du plus jeune. |
|---|---|---|---|---|
| 20 ans. | 25 ans. | 30 ans. | 40 ans. | |
| 11.3034 | 11,0602 | 10,7620 | 9,8809 | 0 |
| 13 7750 | 13,4646 | 13,0826 | 11,9265 | 1 |
| 14,1494 | 13,8158 | 13,4038 | 12,1276 | 2 |
| 14,5036 | 14,1460 | 13,7032 | 12,2998 | 3 |
| 14,7093 | 14,3304 | 13,8595 | 12,3342 | 4 |
| 14,8145 | 14,4157 | 13,9184 | 12,2729 | 5 |
| 14,8693 | 14,4509 | 13,9274 | 12,1589 | 6 |
| 14,8835 | 14,4455 | 13,8957 | 12,0219 | 7 |
| 14,8694 | 14,4115 | 13,8127 | 11,8523 | 8 |
| 14,8417 | 14,3632 | 13,7124 | 11,6832 | 9 |
| 14,7809 | 14,2816 | 13,5766 | 11,4790 | 10 |
| 14,6840 | 14,1639 | 13,4027 | 11,2587 | 11 |
| 14,5485 | 14,0076 | 13 1882 | 11,0218 | 12 |
| 14,4077 | 13,8226 | 12,9634 | 10,7739 | 13 |
| 14,2613 | 13,6291 | 12,7278 | 10,5143 | 14 |
| 14,1089 | 13,4266 | 12,4806 | 10,2635 | 15 |
| 13,9501 | 13,2146 | 12,2211 | 10,0011 | 16 |
| 13,8024 | 13,0093 | 11,9854 | 9,7390 | 17 |
| 13,6269 | 12,7942 | 11,7381 | 9,4857 | 18 |
| 13,4435 | 12,5687 | 11,4995 | 9,2209 | 19 |
| 13,2517 | 12,3322 | 11,2492 | 8,9437 | 20 |
| 13,0684 | 12,1002 | 11,0222 | 8,6651 | 21 |
| 12,8768 | 11,8779 | 10,8054 | 8,3728 | 22 |
| 12,6763 | 11,6448 | 10,5789 | 8,0870 | 23 |
| 12,4664 | 11,4211 | 10,3419 | 7,7873 | 24 |
| 12,2465 | 11,1874 | 10,1146 | 7,4725 | 25 |
| 12,0159 | 10,9623 | 9,8772 | 7,1626 | 26 |
| 11,7949 | 10,7474 | 9,6288 | 6,8586 | 27 |
| 11,5631 | 10,5228 | 9,3897 | 6,5622 | 28 |
| 11,3407 | 10,2878 | 9,1401 | 6,2756 | 29 |
| 11,1075 | 10,0627 | 8,8791 | 6,0021 | 30 |
| 10,8836 | 9,8275 | 8,6057 | 5,7230 | 31 |
| 10,6699 | 9,5816 | 8,3189 | 5,4624 | 32 |
| 10,4466 | 9,3450 | 8,0387 | 5,2025 | 33 |

Digitized by Google

*Suite de la*

| AGE du plus jeune. | DIFFÉRENCE D'AGE. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 an. | 5 ans. | 10 ans. | 15 ans. |
| 34 | 13,3803 | 12,9166 | 12,1764 | 11,2219 |
| 35 | 13,2382 | 12,7329 | 11,9536 | 10,9882 |
| 36 | 13,0907 | 12,5409 | 11,7199 | 10,7634 |
| 37 | 12,9375 | 12,3401 | 11,4951 | 10,5485 |
| 38 | 12,7372 | 12,1103 | 11,2409 | 10,3070 |
| 39 | 12,5274 | 11,8691 | 10,9940 | 10,0537 |
| 40 | 12,3076 | 11,6158 | 10,7346 | 9,8083 |
| 41 | 12,0771 | 11,3495 | 10,4818 | 9,5512 |
| 42 | 11,8351 | 11,0893 | 10,2362 | 9,2814 |
| 43 | 11,5809 | 10,8154 | 9,9784 | 9,0183 |
| 44 | 11,3137 | 10,5467 | 9,7075 | 8,7424 |
| 45 | 11,0326 | 10,2639 | 9,4423 | 8,4526 |
| 46 | 10,7366 | 9,9850 | 9,1636 | 8,1476 |
| 47 | 10,4623 | 9,7279 | 8,8866 | 7,8405 |
| 48 | 10,1733 | 9,4575 | 8,6144 | 7,5365 |
| 49 | 9,9054 | 9,1900 | 8,3440 | 7,2299 |
| 50 | 9,6232 | 8,9271 | 8,0596 | 6,9062 |
| 51 | 9,3617 | 8,6673 | 7,7751 | 6,5967 |
| 52 | 9,1224 | 9,4107 | 7,4902 | 6,3028 |
| 53 | 8,8713 | 8,1596 | 7,2088 | 6,0138 |
| 54 | 8,6072 | 7,8960 | 6,9123 | 5,7314 |
| 55 | 8,3645 | 7,6350 | 6,6134 | 5,4703 |
| 56 | 8,1100 | 7,3605 | 6,3163 | 5,2020 |
| 57 | 7,8424 | 7,0711 | 6,0216 | 4,9482 |
| 58 | 7,5955 | 6,7993 | 5,7439 | 4,7039 |
| 59 | 7,3367 | 6,5130 | 5,4725 | 4,4607 |
| 60 | 7,0646 | 6,2105 | 5,2098 | 4,2215 |
| 61 | 6,7778 | 5,9078 | 4,9387 | 3,9642 |
| 62 | 6,4745 | 5,6050 | 4,6794 | 3,7116 |
| 63 | 6,1865 | 5,3171 | 4,4282 | 3,4798 |
| 64 | 5,8819 | 5,0319 | 4,1753 | 3,2383 |
| 65 | 5,5584 | 4,7507 | 3,9224 | 3,0191 |
| 66 | 5,2461 | 4,4710 | 3,6599 | 2,8131 |
| 67 | 4,9461 | 4,2124 | 3,4100 | 2,6291 |
| 68 | 4,6603 | 3,9617 | 3,1791 | 2,4338 |
| 69 | 4,3916 | 3,7218 | 2,9487 | 2,2126 |
| 70 | 4,1442 | 3,4973 | 2,7510 | 2,0017 |
| 71 | 3,8911 | 3,2580 | 2,5608 | 1,8012 |

Digitized by Google

*Table nº 3.*

| DIFFÉRENCE D'AGE. | | | | AGE du plus jeune. |
|---|---|---|---|---|
| 20 ans. | 25 ans. | 30 ans. | 40 ans. | |
| 10,2129 | 9,0980 | 7,7450 | 4,9460 | 34 |
| 9,9889 | 8,8397 | 7,4364 | 4,6963 | 35 |
| 9,7549 | 8,5692 | 7,1329 | 4,4301 | 36 |
| 9,5102 | 8,2854 | 6,8357 | 4,1736 | 37 |
| 9,2595 | 7.9949 | 6,5352 | 3,9269 | 38 |
| 8,9972 | 7,6899 | 6,2440 | 3,6733 | 39 |
| 8,7223 | 7,3692 | 5,9652 | 3,4499 | 40 |
| 8,4338 | 7,0523 | 5,6800 | 3.2369 | 41 |
| 8,1304 | 6,7401 | 5,4122 | 3,0436 | 42 |
| 7,8316 | 6,4340 | 5,1441 | 2,8312 | 43 |
| 7,5174 | 6,1360 | 4,8777 | 2,5827 | 44 |
| 7,1862 | 5,8488 | 4,6161 | 2,3387 | 45 |
| 6,8570 | 5,5536 | 4,3359 | 2,1073 | 46 |
| 6,5428 | 5,2838 | 4,0705 | 1,9096 | 47 |
| 6,2332 | 5,0122 | 3,8191 | 1,6529 | 48 |
| 5,9415 | 4,7504 | 3,5661 | 1,3997 | 49 |
| 5,6594 | 4,4925 | 3,3407 | 1,1501 | 50 |
| 5,3798 | 4,2245 | 3,1302 | 0,91252 | 51 |
| 5,1259 | 3,9718 | 2,9442 | 0,69337 | 52 |
| 4,8710 | 3,7333 | 2,7392 | 0,47114 | 53 |
| 4,6169 | 3,4864 | 2,4983 | » | 54 |
| 4,3766 | 3,2743 | 2,2665 | » | 55 |
| 4,1188 | 3,0713 | 2,0470 | » | 56 |
| 3,8676 | 2,8862 | 1,8562 | » | 57 |
| 3,6387 | 2,6890 | 1,6123 | » | 58 |
| 3,4021 | 2,4573 | 1,3685 | » | 59 |
| 3,1923 | 2,2294 | 1,1284 | » | 60 |
| 2,9909 | 2,0133 | 0,89732 | » | 61 |
| 2,8060 | 1,8252 | 0,68172 | » | 62 |
| 2,6092 | 1,5849 | 0,46486 | » | 63 |
| 2,3772 | 1,3440 | » | » | 64 |
| 2,1465 | 1,1052 | » | » | 65 |
| 1,9311 | 0,87748 | » | » | 66 |
| 1,7472 | 0,66722 | » | » | 67 |
| 1,5126 | 0,45583 | » | » | 68 |
| 1,2813 | » | » | » | 69 |
| 1,0571 | » | » | » | 70 |
| 0,84035 | » | » | » | 71 |

Digitized by Google

*Suite de la*

| AGE du plus jeune. | DIFFÉRENCE D'AGE. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 an. | 5 ans. | 10 ans. | 15 ans. |
| 72 | 3,6661 | 3,0379 | 2,3980 | 1,6357 |
| 73 | 3,4445 | 2,8320 | 2,2236 | 1,4210 |
| 74 | 3,2294 | 2,6238 | 2,0238 | 1,2080 |
| 75 | 3,0255 | 2,4431 | 1,8322 | 1,00050 |
| 76 | 2,8001 | 2,2622 | 1,6450 | 0,79693 |
| 77 | 2,5869 | 2,1025 | 1,4878 | 0,60969 |
| 78 | 2,3952 | 1,9407 | 1,2913 | 0,42458 |
| 79 | 2,1940 | 1,7502 | 1,0909 | » |
| 80 | 2,0310 | 1,5786 | 0,90203 | » |
| 81 | 1,8831 | 1,4228 | 0,72228 | » |
| 82 | 1,7651 | 1,3038 | 0,56202 | » |
| 83 | 1,6310 | 1,1398 | 0,39952 | » |
| 84 | 1,4563 | 0,96139 | » | » |
| 85 | 1,2883 | 0,78756 | » | » |
| 86 | 1,1378 | 0,62575 | » | » |
| 87 | 1,03281 | 0,49227 | » | » |
| 88 | 0,86642 | 0,34965 | » | » |
| 89 | 0,70358 | » | » | » |
| 90 | 0,54810 | » | » | » |
| 91 | 0,40760 | » | » | » |
| 92 | 0,29817 | » | » | » |
| 93 | 0,24039 | » | » | » |
| 94 | » | » | » | » |
| 95 | » | » | » | » |

Digitized by Google

*Table n° 3.*

| DIFFÉRENCE D'AGE. | | | | AGE du plus jeune. |
|---|---|---|---|---|
| 20 ans. | 25 ans. | 30 ans. | 40 ans. | |
| 0,64233 | » | » | » | 72 |
| 0,44246 | » | » | » | 73 |
| » | » | » | » | 74 |
| » | » | » | » | 75 |
| » | » | » | » | 76 |
| » | » | » | » | 77 |
| » | » | » | » | 78 |
| » | » | » | » | 79 |
| » | » | » | » | 80 |
| » | » | » | » | 81 |
| » | » | » | » | 82 |
| » | » | » | » | 83 |
| » | » | » | » | 84 |
| » | » | » | » | 85 |
| » | » | » | » | 86 |
| » | » | » | » | 87 |
| » | » | » | » | 88 |
| » | » | » | » | 89 |
| » | » | » | » | 90 |
| » | » | » | » | 91 |
| » | » | » | » | 92 |
| » | » | » | » | 93 |
| » | » | » | » | 94 |
| » | » | » | » | 95 |

Digitized by Google

**N° 4.** — *Valeur d'une annuité viagère de 1 franc sur et l'intérêt*

| AGE du plus jeune. | DIFFÉRENCE D'AGE. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 an. | 5 ans. | 10 ans. | 15 ans. |
| 0 | 6,1070 | 9,5457 | 9,4751 | 9,1758 |
| 1 | 9,7821 | 12,1631 | 11,9382 | 11,5506 |
| 2 | 12,2778 | 13,6349 | 13,2954 | 12,8600 |
| 3 | 13,7700 | 14,4033 | 13,9921 | 13,5345 |
| 4 | 14,5893 | 14,7627 | 14,3129 | 13,8466 |
| 5 | 14,9935 | 14,8877 | 14,4186 | 13,9536 |
| 6 | 15,1492 | 14,8788 | 14,4044 | 13,9437 |
| 7 | 15,1580 | 14 7935 | 14,3217 | 13,8669 |
| 8 | 15,0807 | 14,6651 | 14,2003 | 13,7516 |
| 9 | 14,9538 | 14,5134 | 14,0577 | 13,6146 |
| 10 | 14,7992 | 14,3498 | 13,9040 | 13,4654 |
| 11 | 14,6304 | 14,1814 | 13,7453 | 13,3099 |
| 12 | 14,4554 | 14,0121 | 13,5850 | 13,1509 |
| 13 | 14,2790 | 13,8444 | 13,4253 | 12,9914 |
| 14 | 14,1041 | 13,6795 | 13,2670 | 12,8313 |
| 15 | 13,9324 | 13,5181 | 13,1107 | 12,6716 |
| 16 | 13,7647 | 13,3604 | 12,9565 | 12,4965 |
| 17 | 13,6013 | 13,2061 | 12,8041 | 12,3517 |
| 18 | 13,4422 | 13,0550 | 12,6533 | 12,1924 |
| 19 | 13,2872 | 12,9068 | 12,5037 | 12,0326 |
| 20 | 13,1360 | 12,7609 | 12,3549 | 11,8721 |
| 21 | 12,9882 | 12,6170 | 12,1910 | 11,7105 |
| 22 | 12,6013 | 12,4743 | 12,0562 | 11,5473 |
| 23 | 12,4422 | 12,3324 | 11,9066 | 11,3822 |
| 24 | 12,2872 | 12,1908 | 11,7557 | 11,2148 |
| 25 | 12,1360 | 12,0488 | 11,6030 | 11,0448 |
| 26 | 12,2801 | 11,8909 | 11,4482 | 10,8717 |
| 27 | 12,1407 | 11,7603 | 11,2908 | 10,6955 |
| 28 | 12,0007 | 11,6138 | 11,1303 | 10,5157 |
| 29 | 11,8596 | 11,4650 | 10,9665 | 10,3323 |
| 30 | 11,7169 | 11,3133 | 10,7990 | 10,1451 |
| 31 | 11,5428 | 11,1441 | 10,6140 | 9,9412 |
| 32 | 11,4217 | 10,9981 | 10,4506 | 9,7573 |
| 33 | 11,2707 | 10,8351 | 10,2703 | 9,5580 |
| 34 | 11,1161 | 10,6678 | 10,0856 | 9,3545 |

Digitized by Google

2 *têtes réunies d'après la loi de mortalité de* DUVILLARD *à* 4 *p.* 100.

| DIFFÉRENCE D'AGE. | | | | AGE du plus jeune. |
|---|---|---|---|---|
| 20 ans. | 25 ans. | 30 ans. | 40 ans. | |
| 8,8793 | 8,5884 | 8,2786 | 7,4926 | 0 |
| 11,1746 | 10,8001 | 10,3808 | 9,3482 | 1 |
| 12,4406 | 12,0162 | 11,5462 | 10,3262 | 2 |
| 13,0930 | 12,6382 | 12,1262 | 10,7842 | 3 |
| 13,3945 | 12,9202 | 12,3775 | 10,9455 | 4 |
| 13,4966 | 13,0080 | 12,4410 | 10,9377 | 5 |
| 13,4843 | 12,9678 | 12,3957 | 10,8323 | 6 |
| 13,4057 | 12,8931 | 12,2863 | 10,6694 | 7 |
| 13,2884 | 12,7644 | 12,1382 | 10,4723 | 8 |
| 13,1483 | 12,6121 | 11,9666 | 10,2544 | 9 |
| 12,9948 | 12,4454 | 11,7801 | 10,0238 | 10 |
| 12,8174 | 12,2697 | 11,5842 | 9,7853 | 11 |
| 12,6662 | 12,0882 | 11,3819 | 9,5420 | 12 |
| 12,4973 | 11,9026 | 11,1752 | 9,2957 | 13 |
| 12,3267 | 11,7143 | 10,9652 | 9,0477 | 14 |
| 12,1547 | 11,5236 | 10,7528 | 8,7988 | 15 |
| 11,9817 | 11,3309 | 10,5382 | 8,5495 | 16 |
| 11,8074 | 11,1363 | 10,3217 | 8,3001 | 17 |
| 11,6319 | 10,9398 | 10,1034 | 8,0510 | 18 |
| 11,4549 | 10,7413 | 9,8835 | 7,8024 | 19 |
| 11,2760 | 10,5407 | 9,6618 | 7,5545 | 20 |
| 11,0952 | 10,3380 | 9,4386 | 7,3074 | 21 |
| 10,9120 | 10,1330 | 9,2138 | 7,0613 | 22 |
| 10,7264 | 9,9257 | 8,9874 | 6,8164 | 23 |
| 10,5381 | 9,7159 | 8,7597 | 6,5729 | 24 |
| 10,3469 | 9,5037 | 8,5304 | 6,3310 | 25 |
| 10,1526 | 9,2892 | 8,2999 | 6,0909 | 26 |
| 9,9552 | 9,0722 | 8,0682 | 5,8528 | 27 |
| 9,7545 | 8,8527 | 7,8353 | 5,6171 | 28 |
| 9,5506 | 8,6311 | 7,6015 | 5,3841 | 29 |
| 9,3433 | 8,4072 | 7,3671 | 5,1540 | 30 |
| 9,1211 | 8,1706 | 7,1227 | 4,9205 | 31 |
| 8,9179 | 7,9522 | 6,8955 | 4,7034 | 32 |
| 8,7010 | 7,7225 | 6,6600 | 4,4850 | 33 |
| 8,4812 | 7,4913 | 6,4246 | 4,2719 | 34 |

Digitized by Google

*Suite de la*

| AGE du plus jeune. | DIFFÉRENCE D'AGE. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 an. | 5 ans. | 10 ans. | 15 ans. |
| 35 | 10,9575 | 10,4959 | 9,8962 | 9,1471 |
| 36 | 10,7946 | 10,3191 | 9,7022 | 8,9358 |
| 37 | 10,6272 | 10,1374 | 9,5035 | 8,7209 |
| 38 | 10,4548 | 9,9507 | 9,3003 | 8,5023 |
| 39 | 10,2776 | 9,7590 | 9,0927 | 8,2806 |
| 40 | 10,0952 | 9,5623 | 8,8808 | 8,0557 |
| 41 | 9,9076 | 9,3606 | 8,6648 | 7,8281 |
| 42 | 9,7150 | 9,1542 | 8,4451 | 7,5981 |
| 43 | 9,5171 | 8,9433 | 8,2218 | 7,3661 |
| 44 | 9,3144 | 8,7281 | 7,9955 | 7,1323 |
| 45 | 9,1069 | 8,5088 | 7,7663 | 6,8973 |
| 46 | 8,8947 | 8,2858 | 7,5347 | 6,6614 |
| 47 | 8,6782 | 8,0595 | 7,3011 | 6,4251 |
| 48 | 8,4578 | 7,8302 | 7,0659 | 6,1887 |
| 49 | 8,2337 | 7,5985 | 6,8295 | 5,9527 |
| 50 | 8,0064 | 7,3645 | 6,5925 | 5,7176 |
| 51 | 7,7762 | 7,1290 | 6,3553 | 5,4837 |
| 52 | 7,5436 | 6,8923 | 6,1182 | 5,2516 |
| 53 | 7,3090 | 6,6548 | 5,8818 | 5,0217 |
| 54 | 7,0729 | 6,4171 | 5,6465 | 4,7944 |
| 55 | 6,8577 | 6,1796 | 5,4127 | 4,5701 |
| 56 | 6,5980 | 5,9427 | 5,1809 | 4,3495 |
| 57 | 6,3601 | 5,7069 | 4,9515 | 4,1329 |
| 58 | 6,1226 | 5,4726 | 4,7248 | 3,9208 |
| 59 | 5,8859 | 5,2402 | 4,5013 | 3,7139 |
| 60 | 5,6504 | 5,0102 | 4,2814 | 3,5129 |
| 61 | 5,4165 | 4,7829 | 4,0655 | 3,3185 |
| 62 | 5,1848 | 4,5587 | 3,8540 | 3,1337 |
| 63 | 4,9555 | 4,3380 | 3,6474 | 2,9538 |
| 64 | 4,7291 | 4,1210 | 3,4460 | 2,7865 |
| 65 | 4,5058 | 3,9082 | 3,2505 | 2,6320 |
| 66 | 4,2860 | 3,6998 | 3,0615 | 2,4930 |
| 67 | 4,0701 | 3,4962 | 2,8798 | 2,3730 |
| 68 | 3,8584 | 3,2977 | 2,7063 | 2,2770 |
| 69 | 3,6511 | 3,1046 | 2,5425 | 2,2100 |
| 70 | 3,4485 | 2,9175 | 2,3900 | 2,1761 |
| 71 | 3,2509 | 2,7367 | 2,2512 | 2,1749 |
| 72 | 3,0585 | 2,5629 | 2,1291 | 2,1904 |

Digitized by Google

*Table nº 4.*

| DIFFÉRENCE D'AGE. | | | | AGE du plus jeune. |
|---|---|---|---|---|
| 20 ans. | 25 ans. | 30 ans. | 40 ans. | |
| 8,2585 | 7,2588 | 6,1898 | 4,0648 | 35 |
| 8,0332 | 7,0254 | 5,9556 | 3,8650 | 36 |
| 7,8056 | 6,7912 | 5,7227 | 3,6739 | 37 |
| 7,5759 | 6,5565 | 5,4912 | 3,4932 | 38 |
| 7,3444 | 6,3218 | 5,2617 | 3,3254 | 39 |
| 7,1114 | 6,0874 | 5,0345 | 3,1736 | 40 |
| 6,8773 | 5,8536 | 4,8101 | 3,0418 | 41 |
| 6,6423 | 5,6209 | 4,5892 | 2,9352 | 42 |
| 6,4070 | 5,3896 | 4,3724 | 2,8601 | 43 |
| 6,1717 | 5,1602 | 4,1664 | 2,8231 | 44 |
| 6,9368 | 4,9332 | 3,9541 | 2,8288 | 45 |
| 5,7026 | 4,7092 | 3,7547 | 2,8749 | 46 |
| 5,4697 | 4,4886 | 3,5635 | 2,9371 | 47 |
| 5,2386 | 4,2722 | 3,3823 | 2,9514 | 48 |
| 5,0096 | 4,0606 | 3,2134 | 2,8053 | 49 |
| 4,7833 | 3,8548 | 3,0596 | 2,6608 | 50 |
| 4,5602 | 3,6558 | 2,9248 | 2,5179 | 51 |
| 4,3407 | 3,4649 | 2,8138 | 2,3758 | 52 |
| 4,1256 | 3,2836 | 2,7326 | 2,2356 | 53 |
| 3,9155 | 3,1143 | 2,6874 | 2,0978 | 54 |
| 3,7112 | 2,9596 | 2,6828 | 1,9609 | 55 |
| 3,5137 | 2,8230 | 2,7169 | 1,8243 | 56 |
| 3,3241 | 2,7092 | 2,7673 | 1,6971 | 57 |
| 3,1438 | 2,6237 | 2,7739 | 1,5691 | 58 |
| 2,9749 | 2,5726 | 2,6300 | 1,4433 | 59 |
| 2,8197 | 2,5604 | 2,4882 | 1,3203 | 60 |
| 2,6816 | 2,5856 | 2,3483 | 1,2002 | 61 |
| 2,5647 | 2,6272 | 2,2097 | 1,1019 | 62 |
| 2,4742 | 2,6287 | 2,0732 | 0,9837 | 63 |
| 2,4158 | 2,4876 | 1,9390 | 0,8970 | 64 |
| 2,3938 | 2,3491 | 1,8056 | 0,7891 | 65 |
| 2,4073 | 2,2131 | 1,6717 | 0,7434 | 66 |
| 2,4374 | 2,0788 | 1,6044 | 0,6491 | 67 |
| 2,4318 | 1,9472 | 1,5075 | 0,4465 | 68 |
| 2,2945 | 1,8187 | 1,3208 | » | 69 |
| 2,1601 | 1,6920 | 1,2050 | » | 70 |
| 2,0286 | 1,5664 | 1,0920 | » | 71 |
| 1,8993 | 1,4499 | 0,9998 | » | 72 |



Digitized by Google

*Suite de la*

| AGE du plus jeune. | DIFFÉRENCE D'AGE. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 an. | 5 ans. | 10 ans. | 15 ans. |
| 73 | 2,8718 | 2,3969 | 2,0279 | 2,1760 |
| 74 | 2,6909 | 2,2396 | 1,9518 | 2,0440 |
| 75 | 2,5165 | 2,0926 | 1,9051 | 1,9155 |
| 76 | 2,3490 | 1,9578 | 1,8881 | 1,7904 |
| 77 | 2,1891 | 1,8378 | 1,8883 | 1,6684 |
| 78 | 2,0377 | 1,7363 | 1,8665 | 1,5504 |
| 79 | 1,8964 | 1,6580 | 1,7459 | 1,4371 |
| 80 | 1,7670 | 1,6076 | 1,6314 | 1,3279 |
| 81 | 1,6527 | 1,5884 | 1,5242 | 1,2227 |
| 82 | 1,5577 | 1,5942 | 1,4254 | 1,1291 |
| 83 | 1,4886 | 1,5967 | 1,3378 | 1,0415 |
| 84 | 1,4541 | 1,5297 | 1,2648 | 0,9636 |
| 85 | 1,4650 | 1,4851 | 1,2083 | 0,8975 |
| 86 | 1,5300 | 1,4645 | 1,1693 | 0,8443 |
| 87 | 1,6372 | 1,4594 | 1,1488 | 0,8168 |
| 88 | 1,7190 | 1,4405 | 1,1178 | 0,7680 |
| 89 | 1,6174 | 1,3436 | 1,0252 | 0,6998 |
| 90 | 1,5181 | 1,2481 | 0,9348 | 0,6143 |
| 91 | 1,4209 | 1,1532 | 0,8459 | 0,5819 |
| 92 | 1,3248 | 1,0648 | 0,7735 | 0,5183 |
| 93 | 1,2308 | 0,9765 | 0,6860 | 0,3718 |
| 94 | 1,1395 | 0,8904 | 0,6221 | » |
| 95 | 1,0491 | 0,8059 | 0,5420 | » |
| 96 | 0,9580 | 0,7217 | 0,5104 | » |
| 97 | 0,8786 | 0,6557 | 0,4571 | » |
| 98 | 0,7980 | 0,5756 | 0,3339 | » |
| 99 | 0,7204 | 0,5158 | » | » |
| 100 | 0,6480 | 0,4422 | » | » |
| 101 | 0,5844 | 0,4103 | » | » |
| 102 | 0,5070 | 0,3716 | » | » |
| 103 | 0,4306 | 0,2733 | » | » |
| 104 | 0,3850 | » | » | » |
| 105 | 0,3153 | » | » | » |
| 106 | 0,3120 | » | » | » |
| 107 | 0,2981 | » | » | » |
| 108 | 0,2403 | » | » | » |
| 109 | 0,0000 | » | » | » |

Digitized by Google

*Table nº 4.*

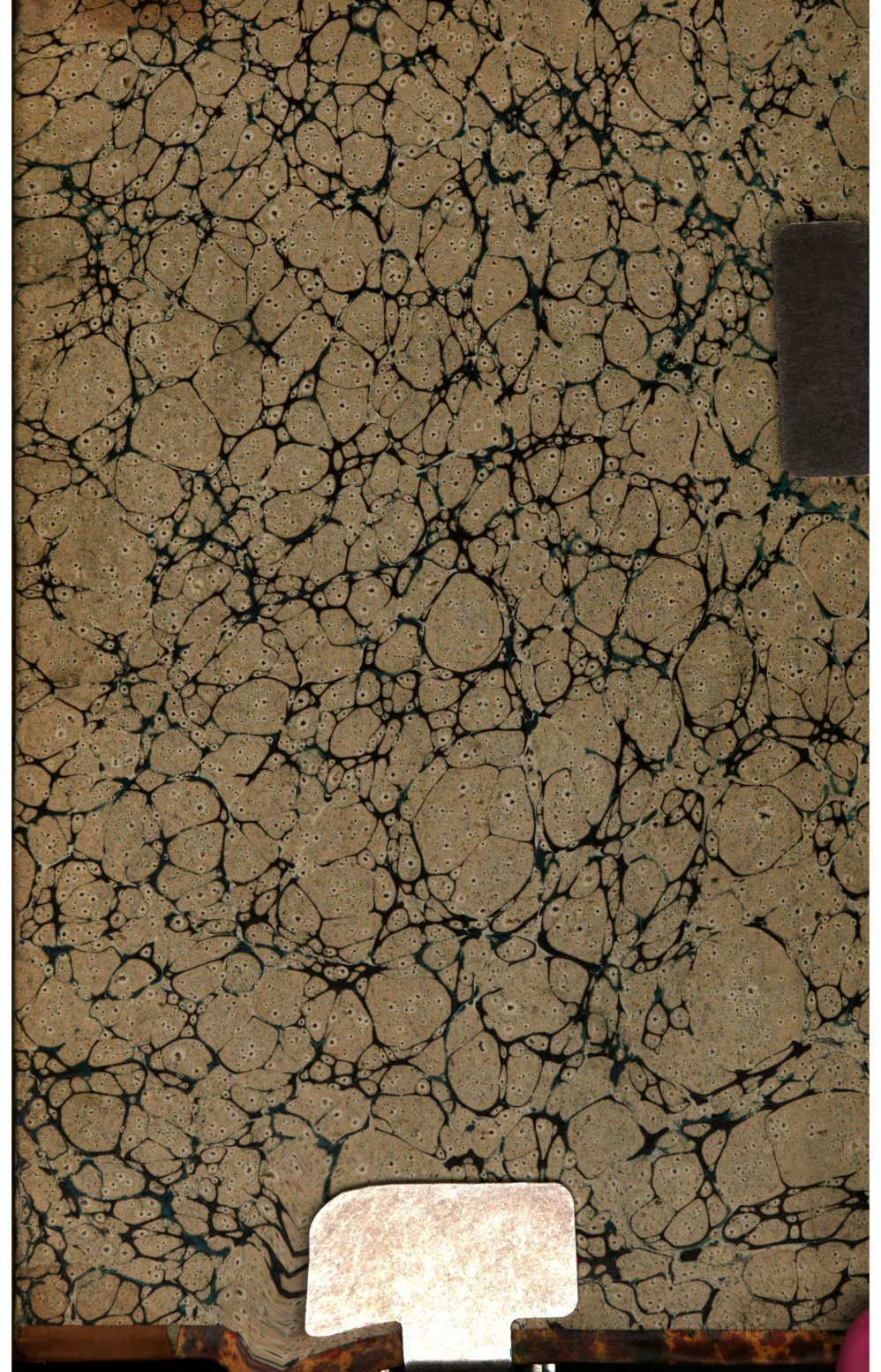
| DIFFÉRENCE D'AGE. | | | | AGE du plus jeune. |
|---|---|---|---|---|
| 20 ans. | 25 ans. | 30 ans. | 40 ans. | |
| 1,7730 | 1,3336 | 0,8896 | » | 73 |
| 1,6502 | 1,2199 | 0,8087 | » | 74 |
| 1,5296 | 1,1093 | 0,7088 | » | 75 |
| 1,4107 | 1,0010 | 0,6679 | » | 76 |
| 1,3008 | 0,9117 | 0,5873 | » | 77 |
| 1,1920 | 0,8038 | 0,4112 | » | 78 |
| 1,0867 | 0,7188 | » | » | 79 |
| 0,9854 | 0,6424 | » | » | 80 |
| 0,8879 | 0,6053 | » | » | 81 |
| 0,8104 | 0,5360 | » | » | 82 |
| 0,7205 | 0,3818 | » | » | 83 |
| 0,6592 | » | » | » | 84 |
| 0,5865 | » | » | » | 85 |
| 0,5719 | » | » | » | 86 |
| 0,5316 | » | » | » | 87 |
| 0,3973 | » | » | » | 88 |
| » | » | » | » | 89 |
| » | » | » | » | 90 |
| » | » | » | » | 91 |
| » | » | » | » | 92 |
| » | » | » | » | 93 |
| » | » | » | » | 94 |
| » | » | » | » | 95 |
| » | » | » | » | 96 |
| » | » | » | » | 97 |
| » | » | » | » | 98 |
| » | » | » | » | 99 |
| » | » | » | » | 100 |
| » | » | » | » | 101 |
| » | » | » | » | 102 |
| » | » | » | » | 103 |
| » | » | » | » | 104 |
| » | » | » | » | 105 |
| » | » | » | » | 106 |
| » | » | » | » | 107 |
| » | » | » | » | 108 |
| » | » | » | » | 109 |

Paris, impr. Paul Dupont, rue de Grenelle-St-Honoré, 45. (1976.4)

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google